

Kapitel 5

Starrer Körper und Kreiseltheorie

Der starre Körper ist eine wichtige Anwendung des d'Alembertschen Prinzips zur Beschreibung der Dynamik eines Massenpunktsystems mit (sehr vielen) Nebenbedingungen und damit der Anwendung der Lagrangegleichungen 2. Art. In einem starren Körper haben die Massenpunkte alle einen festen Abstand zueinander, so dass von den ursprünglich $3N$ Koordinaten, die zur Beschreibung der einzelnen Massenpunkte notwendig wären, nur 6 Freiheitsgrade übrig bleiben. Diese teilen sich in jeweils 3 Freiheitsgrade der Translation und der Rotation auf. Man hat also die Bewegung eines starren Körper vollständig beschrieben, wenn man für einen beliebig gewählten Punkt des Körpers dessen Ort und das Verhalten bei Drehung um diesen Punkt kennt. Schränkt man die Bewegung eines starren Körpers ein, indem man an einem Punkt festhält oder unterstützt, dann handelt es sich um einen **Kreisel** mit 3 Rotationsfreiheitsgraden. Sind nur Rotationen um eine einzige feste Achse erlaubt, so spricht man von einem **physischen Pendel**.

Objekt	Translation	Rotation	gesamt
starrer Körper	3	3	6
Kreisel	0	3	3
physisches Pendel	0	1	1

Tabelle 5.1: Anzahl der Freiheitsgrade verschiedener Körper.

Für jeden der Freiheitsgrade wird also nach dem allgemeinen Lagrangeformalismus eine generalisierte Koordinate eingeführt und eine Lagrangelei-

chung aufgestellt. Dabei ist die Beschreibung der Translationen sehr einfach, während für Rotationen die schon im vorherigen Kapitel beschriebenen Schwierigkeiten hinsichtlich ihrer Nichtvertauschbarkeit auftreten. So ergibt beispielsweise die Hintereinanderausführung von Rotationen um die x -Achse und anschließend der y -Achse nicht dasselbe wie die Rotation um die y -Achse gefolgt von der um die x -Achse.

5.1 Kinematik des starren Körpers

Wir beginnen zunächst mit der Beschreibung der Bewegung eines starren Körpers, also dessen Kinematik. Dazu definieren wir einen Punkt des starren Körpers als Bezugspunkt oder Nullpunkt eines mit dem Körper fest verbundenen Koordinatensystems, des sogenannten **körperfesten Systems**. Die Bewegung eines beliebigen Punktes des starren Körpers setzt sich demnach zusammen aus der Translationsbewegung des Nullpunkts und der Rotationsbewegung um diesen Punkt. Für die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}_i$ eines Punktes \mathbf{r}_i im körperfesten System gilt also

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_T + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i, \quad (5.1)$$

wobei \mathbf{v}_T die Translationsgeschwindigkeit des Nullpunkts darstellt und $\boldsymbol{\omega}$ den Vektor der Winkelgeschwindigkeit des Körpers, also der Drehgeschwindigkeit des mit ihm verbundenen Koordinatensystems.

Wir werden nun zeigen, dass die Wahl des Bezugspunktes des körperfesten Systems die Winkelgeschwindigkeit nicht beeinflusst. Dazu verschieben wir den Nullpunkt um den Vektor \mathbf{a} , so dass für den Ortsvektor eines Punktes des starren Körpers die Transformation

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \mathbf{a} \quad (5.2)$$

gilt. Für diesen Punkt muss aber ebenfalls eine Zerlegung in Translations- und Rotationsbewegung gelten,

$$\dot{\mathbf{r}}'_i = \mathbf{v}'_T + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}'_i. \quad (5.3)$$

Da aber $\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}'_i$ gelten muss, folgt

$$\mathbf{v}_T + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i = \mathbf{v}'_T + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}_i + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{a}. \quad (5.4)$$

Damit diese Beziehung für alle Ortsvektoren \mathbf{r}_i erfüllt ist, müssen die Relationen

$$\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}'_T = \mathbf{v}_T - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} \quad (5.5)$$

gelten. Damit hängt die Winkelgeschwindigkeit tatsächlich nicht von der Wahl des Bezugspunktes ab. Allerdings ändert sich die Translationsgeschwindigkeit bei Verschiebung des Nullpunkts. Man könnte damit den Nullpunkt so wählen, dass die Translationsgeschwindigkeit \mathbf{v}'_T nur eine Komponente in Richtung von $\boldsymbol{\omega}$ hat. Im allgemeinen wird man aber den Schwerpunkt eines starren Körpers beziehungsweise den Unterstützungspunkt eines Kreisels als Bezugspunkt des körperfesten Koordinatensystems wählen.

5.1.1 Addition von Winkelgeschwindigkeiten

Im allgemeinen ist die Reihenfolge von (endlichen) Drehungen nicht vertauschbar. Für infinitesimale Drehungen ist das anders; wir führen zunächst eine infinitesimale Drehung eines beliebigen Punktes um eine Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_1$ durch, der Ortsvektor \mathbf{r} eines Punktes ändert sich damit um

$$(d\mathbf{r})_1 = (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r})dt. \quad (5.6)$$

Eine anschließende infinitesimale Drehung um eine zweite Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_2$ ergibt

$$(d\mathbf{r})_2 = \boldsymbol{\omega}_2 \times [\mathbf{r} + (d\mathbf{r})_1]dt. \quad (5.7)$$

Vernachlässigen wir den Term zweiter Ordnung in den infinitesimalen Größen $(d\mathbf{r})_1dt$, dann bleibt

$$(d\mathbf{r})_2 = (\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r})dt. \quad (5.8)$$

Insgesamt hat sich der Ortsvektor um

$$d\mathbf{r} = (d\mathbf{r})_1 + (d\mathbf{r})_2 = [(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r}]dt \quad (5.9)$$

geändert, was einer Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \quad (5.10)$$

entspricht. Winkelgeschwindigkeiten addieren sich demnach wie Vektoren, und infinitesimale Drehung sind, im Gegensatz zu endlichen Drehungen, vertauschbar.

5.1.2 Die Eulerschen Winkel

Die Drehbewegung eines starren Körpers wird durch die sogenannten **Eulerschen Winkel** beschrieben. Betrachten wir dazu ein körperfestes Bezugssystem, deren Koordinaten wir mit (ξ, η, ζ) bezeichnen wollen, und ein raumfestes Bezugssystem (Laborsystem) mit Koordinaten (x, y, z) , das parallel zu einem Inertialsystem liegen soll. Die Eulerschen Winkel beschreiben die Lage des körperfesten Systems relativ zu dem Laborsystem.

Die Schnittlinie der (x, y) -Ebene des Laborsystems und der (ξ, η) -Ebene des körperfesten Systems heisst **Knotenlinie** K . Wir führen nun die Eulerschen Winkel ein als (siehe Abb. 5.1)

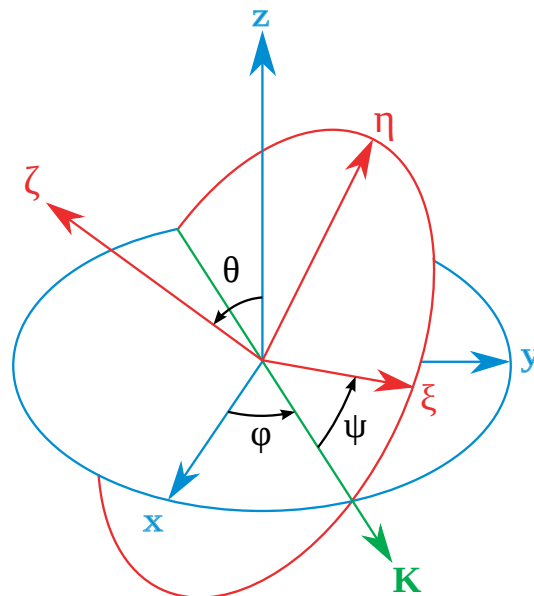


Abbildung 5.1: Die Eulerschen Winkel. Bild adaptiert nach Wikipedia (Creative Commons).

- φ : Winkel zwischen x -Achse und Knotenlinie K ,
- ψ : Winkel zwischen ξ -Achse und Knotenlinie K ,
- θ : Winkel zwischen z -Achse und ζ -Achse.

Wir wollen nun einen Zusammenhang zwischen den Komponenten der Winkelgeschwindigkeit und den zeitlichen Ableitungen der Eulerschen Win-

kel herstellen. Dazu betrachten wir zunächst Drehungen, die sich als Veränderungen jeweils nur eines Eulerschen Winkels schreiben lassen, und setzen dann die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit aus diesen infinitesimalen Drehungen zusammen (was laut der Aussage aus dem vorigen Kapitel möglich ist):

- Drehung um Knotenlinie K : θ variabel, φ und ψ fest

$$\boldsymbol{\omega}_{(\theta)} = \dot{\theta} \mathbf{e}_K = \dot{\theta}(\cos \psi \mathbf{e}_\xi - \sin \psi \mathbf{e}_\eta) \quad (5.11a)$$

- Drehung um z -Achse: φ variabel, ψ und θ fest

$$\boldsymbol{\omega}_{(\varphi)} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_z = \dot{\varphi}(\sin \theta \sin \psi \mathbf{e}_\xi + \sin \theta \cos \psi \mathbf{e}_\eta + \cos \theta \mathbf{e}_\zeta) \quad (5.11b)$$

- Drehung um ζ -Achse: ψ variabel, θ und φ fest

$$\boldsymbol{\omega}_{(\psi)} = \dot{\psi} \mathbf{e}_\zeta \quad (5.11c)$$

Traditionell werden die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit im körperfesten System mit (p, q, r) bezeichnet, so dass nach Addition der obigen Komponenten folgt:

$$p = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \quad (5.12a)$$

$$q = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \quad (5.12b)$$

$$r = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}. \quad (5.12c)$$

Da ein starrer Körper durch 6 Freiheitsgrade vollständig beschrieben wird, müssen 6 generalisierte Koordinaten eingeführt werden. Wir wählen dazu die 3 (kartesischen) Koordinaten des Schwerpunkts des starren Körpers und die 3 Eulerschen Winkel.

5.2 Der Trägheitstensor

Um die Bewegungsgleichungen aufzustellen, benötigt man entweder die Lagrangefunktion und damit kinetische und potentielle Energie des starren Körpers, oder man stellt Bilanzgleichungen wie den Schwerpunktsatz und die Drehimpulsbilanzgleichung auf. In jedem Fall benötigt man einen Zusammenhang zwischen der kinetischen Energie beziehungsweise des Drehimpulses und der Winkelgeschwindigkeit. Diese Beziehungen führen auf die Definition des Trägheitstensors.

5.2.1 Kinetische Energie eines starren Körpers

Um den Zusammenhang zwischen kinetischer Energie und Winkelgeschwindigkeit herauszuarbeiten, schreiben wir zunächst die kinetische Energie eines Massenpunktsystems auf,

$$2T = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2, \quad (5.13)$$

und setzen die Zerlegung (5.1) in Translations- und Rotationsgeschwindigkeit ein,

$$2T = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_T^2 + \sum_{i=1}^N m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^N m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{v}_T. \quad (5.14)$$

Den letzten Term formen wir durch zyklische Rotation des Spatproduktes in

$$\sum_{i=1}^N m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{v}_T = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \cdot (\mathbf{v}_T \times \boldsymbol{\omega}) \quad (5.15)$$

um. Dieser Term verschwindet, wenn entweder der Nullpunkt des körperfesten Bezugssystems wie beim Kreisel ruht ($\mathbf{v}_T = \mathbf{0}$), oder wenn der Nullpunkt mit dem Schwerpunkt zusammenfällt ($\sum_i m_i \mathbf{r}_i$). Wenn eine der beiden Bedingungen erfüllt ist, dann gilt die Aufteilung der kinetischen Energie in Translationsenergie und Rotationsenergie

$$T = T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}} = \frac{M}{2} \mathbf{v}_T^2 + \sum_{i=1}^N m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2, \quad M = \sum_{i=1}^N m_i. \quad (5.16)$$

Wir schreiben nun die Rotationsenergie unter Verwendung der Lagrange-schen Identität

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2 = \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{r}_i^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i)^2 \quad (5.17)$$

um und finden die Beziehung

$$\begin{aligned}
2T_{\text{rot}} &= \sum_{i=1}^N m_i \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{r}_i^2 - \sum_{i=1}^N m_i (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i)^2 & (5.18) \\
&= \omega_x^2 \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_x \omega_y \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i - \omega_x \omega_z \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i \\
&\quad - \omega_x \omega_y \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i + \omega_y^2 \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + z_i^2) - \omega_y \omega_z \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i \\
&\quad - \omega_x \omega_z \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i - \omega_y \omega_z \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i + \omega_z^2 \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2).
\end{aligned}$$

Die Rotationsenergie ist damit eine quadratische Form des Vektors der Winkelgeschwindigkeit, deren Koeffizientenmatrix der **Trägheitstensor** ist. Wir können also schreiben

$$2T_{\text{rot}} = \sum_{m,n=1}^3 \Theta_{mn} \omega_m \omega_n \quad (5.19)$$

mit

$$(\Theta_{mn}) = \begin{pmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i x_i y_i & \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i x_i z_i & -\sum_i m_i y_i z_i & \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}. \quad (5.20)$$

Eine alternative Form ist die Matrixnotation

$$2T_{\text{rot}} = \boldsymbol{\omega}^T \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (5.21)$$

mit

$$\boldsymbol{\Theta} = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}_i^2 \mathbf{I} - \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i), \quad (5.22)$$

wobei \mathbf{I} die Einheitsmatrix in drei Dimensionen bezeichnet und das Symbol \otimes das äußere Produkt oder Tensorprodukt zweier Vektoren.

Die Diagonalelemente des Trägheitstensors sind uns schon einmal kurz als die Trägheitsmomente bezüglich der Rotation um eine feste (kartesische) Achse begegnet. Desweiteren ist der Trägheitstensor eine symmetrische Matrix, $\Theta_{mn} = \Theta_{nm}$. Die Komponenten des Trägheitstensors sind bei vorgegebenem Koordinatensystem eindeutig durch die Massenverteilung des starren

Körpers bestimmt. Bei einer Drehung des Koordinatensystems ändern sich zwar seine Komponenten, aber auch die der Winkelgeschwindigkeit, so dass sich die Rotationsenergie dabei nicht ändert. Das macht den Trägheitstensor zu einer besonderen Matrix. Im Gegensatz zu einer generischen Matrix, die einfach nur eine Ansammlung von Komponenten ohne besondere Transformationseigenschaften ist, transformiert sich ein **Tensor** mit Komponenten A_{ij} bei Rotationen genauso, dass das Skalarprodukt

$$A = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} x_i x_j \quad (5.23)$$

mit den Komponenten eines beliebigen Vektors (Ortsvektor, Winkelgeschwindigkeit etc.) eine Invariante ist.

Bei der Rotation um eine feste Achse hatten wir das Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse über die Beziehung

$$L_z = \Theta \omega \quad (5.24)$$

eingeführt. Damit folgt für die Rotationsenergie bei Drehung um eine feste Achse (z.B. die z -Achse)

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\varrho}_i^2 + \varrho_i^2 \dot{\varphi}_i^2 + \dot{z}_i^2) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \varrho_i^2 \dot{\varphi}_i^2 = \frac{1}{2} \Theta \omega^2. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Offensichtlich besteht nun die Beziehung

$$\Theta \omega^2 = \sum_{i,j=1}^3 \Theta_{ij} \omega_i \omega_j \quad (5.26)$$

zwischen dem Trägheitsmoment Θ um eine feste Achse und den Komponenten des Trägheitstensors Θ_{ij} . Sei nun $\mathbf{n} = \boldsymbol{\omega}/|\boldsymbol{\omega}|$ der Einheitsvektor in Richtung der Drehachse. Dann lautet die Beziehung (5.26)

$$\Theta = \sum_{i,j=1}^3 \Theta_{ij} n_i n_j. \quad (5.27)$$

Wenn man also den Trägheitstensor kennt, kann man das Trägheitsmoment um eine beliebige Achse berechnen.

Wir skalieren nun die Einheitsvektoren in Gl. (5.27) mit dem Trägheitsmoment und definieren

$$x_i = \frac{n_i}{\sqrt{\Theta}}, \quad (5.28)$$

womit Gl. (5.27) zu

$$\sum_{i,j=1}^3 \Theta_{ij} x_i x_j = 1, \quad (5.29)$$

also der Gleichung eines Ellipsoids, des sogenannten **Trägheitsellipsoids**, wird. Die Gleichung kann vereinfacht werden, indem man durch eine **Hauptachsentransformation** die (ξ, η, ζ) -Achsen des körperfesten Koordinatensystems parallel zu den Hauptachsen des Trägheitsellipsoids legt. In diesem Hauptachsensystem hat der Trägheitstensor die Diagonalform

$$(\Theta_{ij}) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \quad (5.30)$$

wobei

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1 \quad (5.31)$$

gilt. Die Größen A , B und C sind die **Hauptträgheitsmomente** des starren Körpers, sie sind Trägheitsmomente bezüglich der **Hauptträgheitsachsen** des starren Körpers. Die Rotationsenergie nimmt im Hauptachsensystem die einfache Form

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) \quad (5.32)$$

an. Bezüglich ihres Trägheitstensors werden starre Körper in die folgenden Klassen eingeteilt:

- **unsymmetrischer Kreisel:** $A \neq B \neq C$,
- **symmetrischer Kreisel:** $A = B \neq C$, Trägheitsellipsoid ist ein Rotationsellipsoid,
- **Kugelkreisel:** $A = B = C$, Trägheitsellipsoid ist eine Kugel.

5.2.2 Drehimpuls und Trägheitstensor

Als nächstes untersuchen wir den Zusammenhang zwischen dem Trägheitstensor und dem Drehimpuls eines Massenpunktsystems

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i. \quad (5.33)$$

Wir teilen wiederum die Geschwindigkeit in Translations- und Rotationsgeschwindigkeit auf und finden

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_T + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i). \quad (5.34)$$

In diesem Fall verschwindet der erste Term, da laut Vereinbarung entweder Bezugspunkt des körperfesten Koordinatensystems im Schwerpunkt liegen soll ($\sum_i m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{0}$) oder der Nullpunkt ruht ($\mathbf{v}_T = \mathbf{0}$). Das doppelte Vektorprodukt teilen wir mithilfe der Formel $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ auf und erhalten

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N m_i \boldsymbol{\omega} r_i^2 - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i). \quad (5.35)$$

Ein Vergleich mit der Rotationsenergie (5.18) zeigt, dass die Beziehung

$$2T_{\text{rot}} = \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (5.36)$$

mit dem Drehimpuls besteht. Ausgedrückt mithilfe des Trägheitstensors lautet diese Beziehung

$$\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^T \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{L} = \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (5.37)$$

Analog erhält man diese Beziehung, indem man die Komponenten des Drehimpulses aufschreibt und direkt mit den Komponenten des Trägheitstensors (5.20) vergleicht. Im Hauptachsensystem vereinfacht sich die Beziehung zu

$$\mathbf{L} = A p \mathbf{e}_\xi + B q \mathbf{e}_\eta + C r \mathbf{e}_\zeta. \quad (5.38)$$

Wir betrachten nun wieder das Trägheitsellipsoid in der Hauptachsenform (5.31) und bilden den Gradienten der Fläche $f(\xi, \eta, \zeta) = A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 - 1$ mit dem Ergebnis, dass

$$\nabla f = 2A\xi \mathbf{e}_\xi + 2B\eta \mathbf{e}_\eta + 2C\zeta \mathbf{e}_\zeta. \quad (5.39)$$

Dieser Gradient steht senkrecht auf dem Ellipsoid beziehungsweise dessen Tangentialebene im Punkt (ξ, η, ζ) und ist proportional zum Drehimpuls. Dies sieht man noch besser in der allgemeinen Form des Trägheitsellipsoids

$$f = \sum_{i,j=1}^3 \Theta_{ij} x_i x_j - 1 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = 2 \sum_{j=1}^3 \Theta_{ij} x_j = 2 \sum_{j=1}^3 \frac{\Theta_{ij} \omega_j}{|\boldsymbol{\omega}| \sqrt{\Theta}} = \frac{2L_i}{|\boldsymbol{\omega}| \sqrt{\Theta}}. \quad (5.40)$$

Legt man den Vektor der Winkelgeschwindigkeit durch den Punkt (ξ, η, ζ) , dann steht der Vektor des Drehimpulses senkrecht auf der Tangentialebene in diesem Punkt und ist damit im allgemeinen nicht parallel zur Winkelgeschwindigkeit. Die Richtungen der beiden Vektoren $\boldsymbol{\omega}$ und \mathbf{L} fallen nur zusammen, wenn die Rotation um eine der Hauptachsen erfolgt (siehe Abb. 5.2).

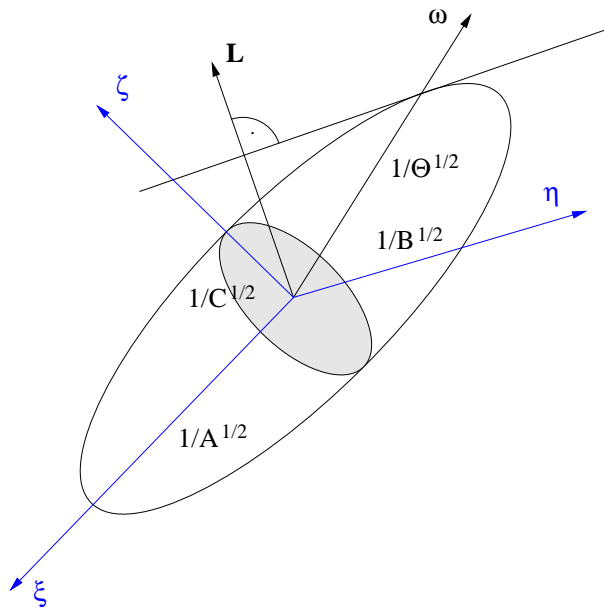


Abbildung 5.2: Trägheitsellipsoid mit Hauptträgheitsmomenten A , B und C und die Konstruktion des Drehimpulses \mathbf{L} .

5.2.3 Der Steinersche Satz für Trägheitstensoren

Der Trägheitstensor eines starren Körpers wurde bisher speziell für ein körperfestes Koordinatensystem definiert, dessen Nullpunkt im Schwerpunkt des Körpers

liegt. Wie schon bei der Betrachtung des Trägheitsmomentes bei der Drehung um eine feste Achse kann auch für den Trägheitstensor eine einfache Beziehung angegeben werden, wenn der Bezugspunkt des körperfestes Koordinatensystems um einen Vektor \mathbf{a} gegenüber dem Schwerpunkt verschoben wird. Die Ortsvektoren \mathbf{r}_i der Massenpunkte des starren Körpers werden also transformiert in

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \mathbf{a}. \quad (5.41)$$

Gehen wir damit in die Definition des Trägheitstensors bezüglich des Schwerpunktes, so erhalten wir für den Trägheitstensor bezüglich des verschobenen Nullpunkts

$$\begin{aligned} \Theta_{\mathbf{a}} &= \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{r}'_i{}^2 \mathbf{I} - \mathbf{r}'_i \otimes \mathbf{r}'_i] = \sum_{i=1}^N m_i [(\mathbf{r}_i + \mathbf{a})^2 \mathbf{I} - (\mathbf{r}_i + \mathbf{a}) \otimes (\mathbf{r}_i + \mathbf{a})] \\ &= \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{r}_i^2 \mathbf{I} - \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i] + \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{a}^2 \mathbf{I} - \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}] \\ &\quad + \sum_{i=1}^N m_i [2\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{a} \mathbf{I} - \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{a} - \mathbf{a} \otimes \mathbf{r}_i] \\ &= \Theta + M [\mathbf{a}^2 \mathbf{I} - \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}], \end{aligned} \quad (5.42)$$

wobei ausgenutzt wurde, dass aufgrund der Definition des Schwerpunktes $\sum_i m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{0}$ gilt. Dies ist der **Steinersche Satz** für Trägheitstensoren, der besagt, dass der Unterschied der Trägheitstensoren im körperfesten Schwerpunktsystem und einem dazu verschobenen körperfesten System gerade gleich dem Trägheitstensor eines Massenpunktes mit Gesamtmasse M im Abstand \mathbf{a} vom Schwerpunkt ist.

5.2.4 Beispiel: Hohlzylinder auf schiefer Ebene

Als Beispiel für die Anwendung eines Trägheitstensors und der Rotationsenergie betrachten wir einen Hohlzylinder mit innerem Radius r , äußerem Radius R und Gesamtmasse M , der auf einer geneigten Ebene unter dem Winkel α abrollt (siehe Abb.5.3). Legen wir das körperfeste Koordinatensystem so, dass die ζ -Achse mit der Zylinderachse zusammenfällt, so folgt für den Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} \mathbf{e}_{\zeta}$. Im Hinblick auf die Berechnung der Rotationsenergie als $2T_{\text{rot}} = \boldsymbol{\omega}^T \cdot \Theta \cdot \boldsymbol{\omega}$ benötigen wir nur die Komponente $\Theta_{\zeta\zeta}$ des Trägheitstensors.

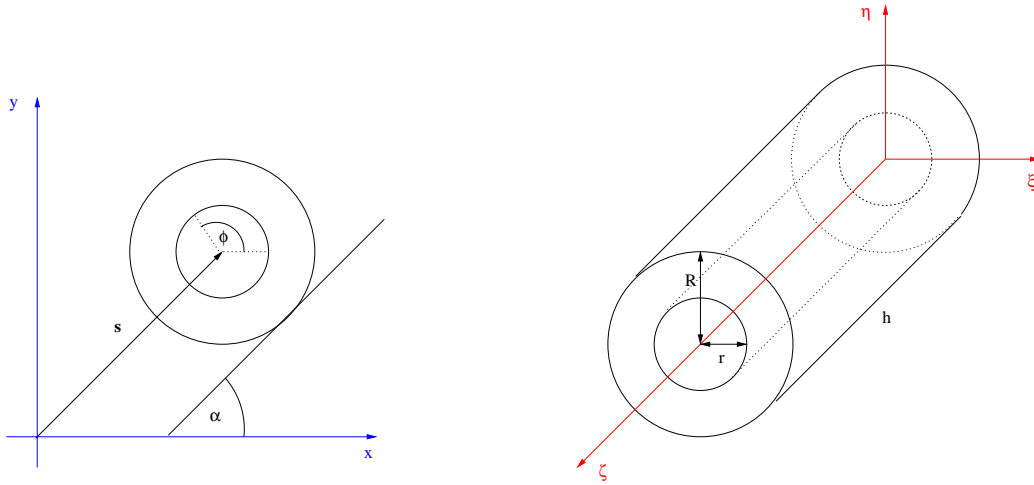


Abbildung 5.3: Abrollender Hohlzylinder.

Wir führen nun im körperfesten Bezugssystem Zylinderkoordinaten

$$\xi = \varrho \cos \varphi, \quad \eta = \varrho \sin \varphi, \quad \zeta = \zeta \quad (5.43)$$

ein und gehen bei der Berechnung des Trägheitstensors zur kontinuierlichen Darstellung mit der Massendichte ρ über, so dass das $\Theta_{\zeta\zeta}$ -Element des Trägheitstensors zu

$$\Theta_{\zeta\zeta} = \rho \int_r^R \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-h/2}^{h/2} d\zeta \varrho^2 = \frac{\rho}{2} \pi h (R^4 - r^4) \quad (5.44)$$

wird. Die Gesamtmasse des Hohlzylinders ist aber gerade $M = \pi h (R^2 - r^2) \rho$, so dass folgt, dass

$$\Theta_{\zeta\zeta} = \frac{M}{2} (R^2 + r^2) \quad (5.45)$$

und damit für die Rotationsenergie

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \Theta_{\zeta\zeta} \omega_{\zeta}^2 = \frac{M}{4} (R^2 + r^2) \dot{\phi}^2 \quad (5.46)$$

gilt.

Wenn wir verlangen, dass der Hohlzylinder auf der geneigten Ebene abrollt, dann folgt für die Translationsgeschwindigkeit des Schwerpunkts mit

Koordinate s die **Rollbedingung**

$$\dot{s} = -R\dot{\phi}e_s. \quad (5.47)$$

Die kinetische und potentielle Energie des Systems werden somit zu

$$\begin{aligned} T &= \frac{M}{2}\dot{s}^2 + T_{\text{rot}} = \frac{M}{2}R^2\dot{\phi}^2 + \frac{M}{4}(R^2 + r^2)\dot{\phi}^2 = \frac{M}{4}\dot{\phi}^2(3R^2 + r^2), \\ U &= Mgs \sin \alpha = -MgR\phi \sin \alpha. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Aus den Lagrangegleichungen oder alternativ aus der Energieerhaltung folgt die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\phi} = \frac{2gR}{3R^2 + r^2} \sin \alpha \quad \rightsquigarrow \quad \ddot{s} = -g \sin \alpha', \quad \sin \alpha' = \frac{2R^2}{3R^2 + r^2} \sin \alpha. \quad (5.49)$$

Diese Bewegungsgleichung ist dieselbe wie die eines Massenpunktes, der auf einer geneigten Ebene mit reduziertem Winkel α' nach unten gleitet. Die Lösung erfolgt durch direkte Integration zu

$$s(t) = -\frac{g}{2} \sin \alpha' t^2 + v_0 t + s_0 \quad (5.50)$$

mit geeignet gewählten Anfangsbedingungen.

5.3 Die Eulerschen Gleichungen

Die Dynamik eines starren Körpers soll nun aus der Drehimpulsbilanzgleichung abgeleitet werden. Dazu ist zu bemerken, dass die Beziehung

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \mathbf{M} \quad (5.51)$$

[siehe Gl. (3.178)] nur in Inertialsystemen und im Schwerpunktsystem, dessen Achsen nicht gegenüber einem Inertialsystem rotieren. In einem solchen System werden aber der Trägheitstensor und Vektor der Winkelgeschwindigkeit zeitabhängig. Man geht also deshalb besser in ein mitrotierendes körperfestes Bezugssystem über, in dem aus der Zeitableitung nach der allgemeinen Vorschrift (3.25) die Beziehung

$$\frac{d'}{dt} \mathbf{L} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{M} \quad (5.52)$$

im körperfesten Bezugssystem wird. Setzen wir in diese Gleichung noch die Verknüpfung mit dem Trägheitstensor ein, so folgt daraus

$$\Theta \cdot \dot{\omega} + \omega \times (\Theta \cdot \omega) = \mathbf{M}. \quad (5.53)$$

Diese Gleichung vereinfacht sich drastisch, wenn wir in das Hauptachsensystem (ξ, η, ζ) übergehen, in dem Winkelgeschwindigkeit und Drehimpuls die Formen

$$\omega = (p, q, r), \quad \mathbf{L} = (Ap, Bq, Cr) \quad (5.54)$$

annehmen. Dann werden daraus die **Eulerschen Gleichungen**

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr &= M_\xi, \\ B\dot{q} + (A - C)rp &= M_\eta, \\ C\dot{r} + (B - A)pq &= M_\zeta. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Diese sind nichts anderes als die Bilanzgleichungen für die Komponenten des Drehimpulses im mitrotierenden Hauptachsensystem des starren Körpers. Zusammen mit den Gleichungen für die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit (5.12) können damit die Eulerschen Winkel als Funktion der Zeit bestimmt und die Lage des Körpers im Raum ermittelt werden.

Die Bewegungsgleichungen lassen sich selbstverständlich auch aus dem Lagrangeformalismus gewinnen, wenn man die Eulerschen Winkel als generalisierte Koordinaten verwendet. Dazu schreiben wir die Lagrangefunktion als

$$L = T - U = \frac{1}{2}M\mathbf{v}_T^2 + \frac{1}{2}\omega^T \cdot \Theta \cdot \omega - U \quad (5.56)$$

und drücken die Rotationsenergie im Hauptachsensystem die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit durch Gl. (5.12), also die Eulerschen Winkel und deren zeitliche Ableitungen aus,

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2}M\mathbf{v}_T^2 + \frac{A}{2} \left(\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \right)^2 + \frac{B}{2} \left(\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \cos \psi \right)^2 \\ & + \frac{C}{2} \left(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \right)^2 - U(\mathbf{R}, \theta, \varphi, \psi) \end{aligned} \quad (5.57)$$

wobei \mathbf{R} die Schwerpunktskoordinate des starren Körpers bezeichnet (vorausgesetzt, der Koordinatenursprung des körperfesten Bezugssystems stimmt mit dem Massenmittelpunkt überein). Die Lagrangegleichungen für die Eulerschen Winkel sind dann zu den Eulerschen Gleichungen äquivalent.

5.3.1 Rotation um freie Achsen

Unter der Rotation einer freien Achse versteht man eine Drehung des starren Körpers bei Abwesenheit von Drehmomenten um eine Achse, deren Lage sich im körperfesten Bezugssystem nicht ändert. Da das Drehmoment verschwinden soll, lauten die Eulerschen Gleichungen

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr &= 0, \\ B\dot{q} + (A - C)rp &= 0, \\ C\dot{r} + (B - A)pq &= 0. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Da es sich um eine freie Achse handeln soll, deren Lage im Körper sich nicht ändert, gilt auch $\dot{p} = \dot{q} = \dot{r} = 0$. Damit reduzieren sich die Eulerschen Gleichungen zu einem algebraischen Gleichungssystem

$$(C - B)qr = (A - C)rp = (B - A)pq = 0. \quad (5.59)$$

Gehen wir von dem allgemeinen Fall aus, dass die Hauptträgheitsmomente des starren Körpers voneinander verschieden sind, $A \neq B \neq C$, dann wird das Gleichungssystem (5.59) genau dann gelöst, wenn mindestens zwei der drei Komponenten (p, q, r) der Winkelgeschwindigkeit verschwinden. Das heisst aber, dass nur die Hauptträgheitsachsen freie Achsen sind, und dass Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit in dieselbe Richtung zeigen, $\mathbf{L} \parallel \boldsymbol{\omega}$. Aufgrund der Drehimpulserhaltung ($\mathbf{M} = \mathbf{0}$) ist damit auch die Richtung der Drehachse im körperfesten Bezugssystem konstant, das heisst, ein im eine freie Achse rotierender starrer Körper 'torkelt' nicht.

Diesen Sachverhalt wollen wir etwas genauer untersuchen und betrachten dazu die Stabilität der Rotation um die drei Hauptträgheitsachsen. Wir nehmen an, dass der starre Körper um die ξ -Achse rotiert und die Drehachse durch eine kleine Störung aus der ξ -Richtung ausgelenkt wird,

$$p = p_0 + \delta p, \quad q = \delta q, \quad r = \delta r. \quad (5.60)$$

Für diese Störungen lauten die Eulerschen Gleichungen

$$\begin{aligned} A\delta\dot{p} + (C - B)\delta q\delta r &= 0, \\ B\delta\dot{q} + (A - C)\delta r(p_0 + \delta p) &= 0, \\ C\delta\dot{r} + (B - A)(p_0 + \delta p)\delta q &= 0. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Vernachlässigen wir Terme, die quadratisch in den kleinen Abweichungen sind, so folgt aus den letzten beiden Gleichungen

$$B\delta\dot{q} + (A - C)p_0\delta r = 0, \quad (5.62)$$

$$C\delta\dot{r} + (B - A)p_0\delta q = 0. \quad (5.63)$$

Dieses gekoppelte System von Differentialgleichungen erster Ordnung für die Störungen δq und δr löst man durch eine weitere zeitliche Differentiation, was auf die entkoppelten Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \delta\ddot{q} + H\delta\dot{q} &= 0, \\ \delta\ddot{r} + H\delta\dot{r} &= 0, \end{aligned} \quad H = \frac{(A-C)(A-B)}{BC} p_0^2 \quad (5.64)$$

führt. Deren Lösungen haben die Form $\delta q = be^{i\sqrt{H}t}$ und $\delta r = ce^{i\sqrt{H}t}$.

Wenn $H > 0$ ist, bleiben die Störungen δq und δr beschränkt, und die Rotation um die ξ -Achse ist stabil. Dies ist der Fall, wenn entweder $A > B$ und $A > C$ oder $A < B$ und $A < C$ sind. Das heisst, dass die Rotationen um die Achsen mit dem kleinsten beziehungsweise größten Hauptträgheitsmoment stabil sind. Ist $H < 0$, gilt also entweder $B < A < C$ oder $C < A < B$, dann wachsen die Störungen δq und δr exponentiell, und die Rotation um die ξ -Achse ist instabil. Dies ist offensichtlich der Fall für eine Drehung um die Achse mit dem mittleren Hauptträgheitsmoment.

Das Standardbeispiel für die Ausnutzung der Stabilität der Rotation um die Achse mit dem größten Trägheitsmoment ist ein fliegender Diskus, der während des Fluges seine Lage im Raum beibehält. Im absteigenden Teil der Flugbahn steht der Diskus somit schräg zur Flugbahn und bekommt einen zusätzlichen Auftrieb.

5.3.2 Kräftefreier symmetrischer Kreisel

Ein symmetrischer Kreisel liegt vor, wenn zwei der drei Hauptträgheitsmomente gleich sind, $A = B$. Die in Richtung des dritten Hauptträgheitsmoments zeigende Symmetrieachse heisst auch **Figurenachse**. In unserem Fall ist dies die ζ -Achse. Wir betrachten zunächst den kräftefreien Fall, bei dem kein Drehmoment auf den Kreisel wirkt. Dies läßt sich trotz des Wirkens der Schwerkraft dadurch erreichen, dass der Unterstützungspunkt in den Massenmittelpunkt gelegt wird. Für das Drehmoment gilt dann nämlich

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{g}) = \sum_{i=1}^N (m_i \mathbf{r}_i) \times \mathbf{g} = \mathbf{0}. \quad (5.65)$$

Die Eulerschen Gleichungen für einen kräftefreien symmetrischen Kreisel lauten

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - A)qr &= 0, \\ A\dot{q} + (A - C)rp &= 0, \\ C\dot{r} &= 0. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Aus der letzten Gleichung folgt sofort, dass $r = r_0 = \text{const.}$ ist; wir wählen r_0 durch die Wahl der ζ -Richtung positiv. Die beiden anderen Gleichungen nehmen damit die Form

$$\begin{aligned} \dot{p} - Rq &= 0, \\ \dot{q} + Rp &= 0, \end{aligned} \quad R = \frac{(A - C)}{A} r_0 \quad (5.67)$$

an. Diese Gleichungen löst man wiederum durch erneutes Differenzieren nach der Zeit und Eliminieren von \dot{p} und \dot{q} mit dem Resultat

$$\begin{aligned} \ddot{p} + R^2 p &= 0, \\ \ddot{q} + R^2 q &= 0. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Die Lösungen dieser Schwingungsdifferentialgleichungen, die gleichzeitig auch den Gl. (5.68) genügen, sind

$$p(t) = a \sin(Rt + \beta), \quad q(t) = a \cos(Rt + \beta). \quad (5.69)$$

Damit folgt für die Beträge der Komponenten der Winkelgeschwindigkeit $p^2 + q^2 = a^2 = \text{const.}$ und weiterhin

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2 = a^2 + r_0^2 = \text{const.} \quad (5.70)$$

Die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ besitzt demnach eine konstante ζ -Komponente r_0 und einen konstanten Betrag ω . Die Projektion der Winkelgeschwindigkeit auf die (ξ, η) -Ebene mit den Komponenten p und q führt eine gleichförmige Kreisbewegung aus. Der Vektor der Winkelgeschwindigkeit bewegt sich also auf einem Kreiskegel, dem **Polkegel**, gleichförmig um die Figurenachse (siehe Abb. 5.4). Figurenachse und momentane Drehachse fallen also nicht zusammen, sondern bilden einen Winkel

$$\tan \alpha = \frac{a}{r_0} \quad (5.71)$$

zueinander, wobei wir durch unsere Wahl der ζ -Achse r_0 als positiv vorausgesetzt haben.

Die Rotationachse der Erde durchstößt die Erdoberfläche definitionsgemäß an den Polen, der Vektor der Winkelgeschwindigkeit also am geographischen Nordpol. Aufgrund von Vorhersagen von Newton und Euler fand der amerikanische Astronom Seth Carlo Chandler im Jahre 1891, dass sich die Rotationachse der Erde mit einer Periode von 433 Tagen mit einem Radius von

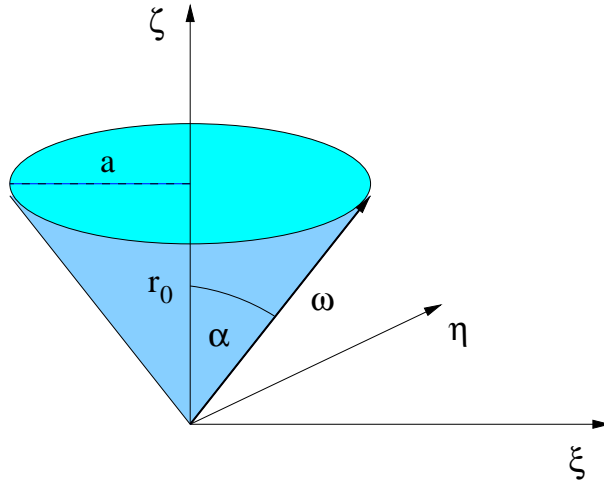


Abbildung 5.4: Polkegel.

9 m um den 'geometrischen' Nordpol bewegt. Dieser Effekt trägt den Namen **Chandler wobble**. Messungen dieses Effekts beruhen auf der Messung der Veränderungen der geographischen Breite relativ zum Fixsternhimmel.

Aus den Lösungen der Eulerschen Gleichungen können nun die Eulerschen Winkel als Funktion der Zeit bestimmt werden. Aus den Gleichungen (5.12) folgt dann

$$p = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi = a \sin(Rt + \beta), \quad (5.72a)$$

$$q = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi = a \cos(Rt + \beta), \quad (5.72b)$$

$$r = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} = r_0. \quad (5.72c)$$

Da bei der kräftefreien Bewegung kein Drehmoment wirkt, ist also der Drehimpuls erhalten. Wir wählen nun das raumfeste Koordinatensystem so, dass die z -Achse in Richtung des Drehimpulses zeigt,

$$\mathbf{L} = L \mathbf{e}_z. \quad (5.73)$$

Im mitrotierenden körperfesten Bezugssystem wird dann der Drehimpuls zu

$$\mathbf{L} = L(\sin \theta \sin \psi \mathbf{e}_\xi + \sin \theta \cos \psi \mathbf{e}_\eta + \cos \theta \mathbf{e}_\zeta) \quad (5.74)$$

und damit im Hauptachsensystem

$$\begin{aligned} L_\xi &= L \sin \theta \sin \psi = Ap, \\ L_\eta &= L \sin \theta \cos \psi = Aq, \\ L_\zeta &= L \cos \theta = Cr. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Die zu lösenden Gleichungen nehmen damit die Form

$$\begin{aligned}\frac{L}{A} \sin \theta \sin \psi &= \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \frac{L}{A} \sin \theta \cos \psi &= \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \frac{L}{C} \cos \theta &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} = r_0\end{aligned}\quad (5.76)$$

an. Aus den ersten beiden Gleichungen folgt sofort, dass

$$\dot{\theta} = 0, \quad \dot{\varphi} = \frac{L}{A}. \quad (5.77)$$

Aus der dritten Gleichung ergibt sich

$$\cos \theta = r_0 \frac{C}{L}, \quad \dot{\psi} = r_0 \frac{A - C}{A} = R. \quad (5.78)$$

Die Lösungen ergeben sich damit zu

$$\varphi = \frac{L}{A}t + \varphi_0, \quad \psi = Rt + \psi_0, \quad \cos \theta = r_0 \frac{C}{L}. \quad (5.79)$$

Diese können noch mit der Bedingung $p^2 + q^2 = a^2$ umgeschrieben werden in

$$\varphi = at + \varphi_0, \quad \psi = \frac{A - C}{A}r_0t + \beta, \quad \theta = \arctan \frac{aA}{r_0C}. \quad (5.80)$$

Die so erhaltenen Lösungen der Bewegungsgleichungen des kräftefreien symmetrischen Kreisels enthalten noch die 4 Integrationskonstanten a, r_0, φ_0, β . Die Bewegungsgleichungen für die Eulerschen Winkel enthalten insgesamt 6 Integrationskonstanten, zwei von diesen sind aber schon durch die Festlegung der z -Achse als Drehimpulsachse verbraucht worden.

Wir erinnern uns (siehe Abb. 5.1), dass θ den Winkel zwischen der z -Achse im raumfesten Koordinatensystem und der Figurenachse ζ , der Symmetrieachse des Kreisels, bezeichnet. Aus den Gleichungen (5.80) wird ersichtlich, dass sich die Figurenachse auf einem Kegel mit konstantem Öffnungswinkel θ um die z -Achse, also die Richtung des Drehimpulses, bewegt. Diesen Kegel nennt man **Nutationskegel**. Die Winkelgeschwindigkeit dieser gleichförmigen Nutationsbewegung ist gerade $\dot{\varphi}$. Gleichzeitig dreht sich der Körper um seine Figurenachse. Diese Bewegung der körperfesten ξ, η -Achsen geschieht mit

der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$. Der Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ setzt sich somit zusammen aus den beiden Drehungen um die Figurenachse ζ und um die Drehimpulsachse z ,

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_z + \dot{\psi} \mathbf{e}_\zeta, \quad (5.81)$$

und $\boldsymbol{\omega}$ liegt immer in der (z, ζ) -Ebene. Die momentane Drehachse rotiert also mit der ζ -Achse um die z -Achse. Sie bewegt sich gleichförmig auf einem Kreiskegel, dem **Spurkegel**, mit konstantem Öffnungswinkel $|\theta - \alpha|$ um die Drehimpulsachse, und gleichzeitig auf dem Polkegel um die Figurenachse.

Die gegenseitige Bewegung der Achsen veranschaulicht man durch das Abrollen von Kegeln. Dazu unterscheiden wir die beiden Fälle $A > C$ und $A < C$. Aus den Beziehungen

$$\tan \alpha = \frac{a}{r_0}, \quad \tan \theta = \frac{aA}{r_0 c} = \frac{A}{C} \tan \alpha, \quad \dot{\psi} = \frac{A - C}{A} r_0 \quad (5.82)$$

liest man ab, dass für $A > C$ die momentane Drehachse zwischen der Drehimpulsachse und der Figurenachse liegt ($\theta > \alpha$). Der Polkegel rollt mit seiner Außenfläche auf dem Spurkegel ab ($\dot{\psi} > 0$) und führt die Figurenachse auf dem Nutationskegel mit sich. Im Fall $A < C$ hingegen liegt die Drehimpulsachse zwischen der momentanen Drehachse und der Figurenachse ($\theta < \alpha$), und der Polkegel rollt mit seiner Innenfläche auf dem Spurkegel ab ($\dot{\psi} < 0$). Diese beiden Fälle sind in Abb. 5.5 dargestellt.

5.3.3 Schwerer symmetrischer Kreisel

Ein symmetrischer Kreisel konnte als kräftefrei bezeichnet werden, wenn der Unterstützungspunkt mit dem Schwerpunkt zusammenfällt. Wenn dies nicht der Fall ist, übt die Schwerkraft ein Drehmoment auf den Körper aus. Wir schreiben die Lagrangefunktion des Kreisels (5.57) als

$$L = T - U = \frac{A}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{C}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - Mgs \cos \theta, \quad (5.83)$$

wobei s den Abstand des Schwerpunkts vom Unterstützungspunkt bezeichnet (siehe Abb. 5.6).

Im Prinzip könnte man nun die Lagrangegleichungen für die drei generalisierten Koordinaten θ, ψ, φ (die Eulerschen Winkel) aufschreiben und lösen. Dies ist hier aber nicht einmal nötig, weil man über drei Erhaltungssätze

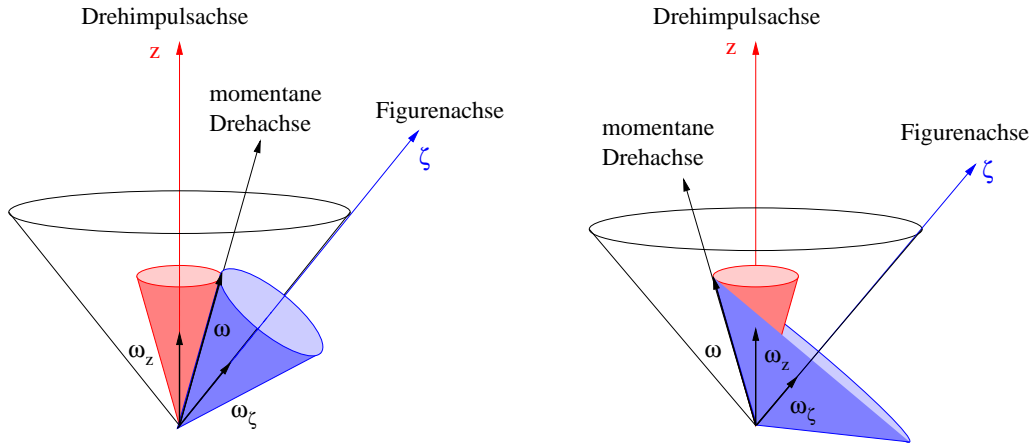


Abbildung 5.5: Lage der Achsen beim kräftefreien symmetrischen Kreisel, mit Nutationskegel (schwarz), Polkegel (blau) und Spurkegel (rot), für $A > C$ (links) sowie $A < C$ (rechts).

die Bewegungsgleichungen direkt integrieren kann. Da die Lagrangefunktion (5.83) nicht explizit von der Zeit abhängt, gilt der Energieerhaltungssatz (Homogenität der Zeit),

$$E = \frac{A}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{C}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 + Mgs \cos \theta = A\epsilon = \text{const.} \quad (5.84)$$

Desweiteren hängt die Lagrangefunktion (5.83) nicht von den generalisierten Koordinaten φ und ψ ab, diese sind also zyklische Koordinaten, für die ebenfalls Erhaltungssätze gelten. Diese sind

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = A\dot{\varphi} \sin^2 \theta + C(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \cos \theta = Aa = \text{const.} \quad (5.85)$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = C(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) = Ab = \text{const.} \quad (5.86)$$

Mit diesen Gleichungen können die generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{\varphi}$ und $\dot{\psi}$ im Energieerhaltungssatz eliminiert werden. Das Ergebnis schreiben wir in der Form

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + u(\theta) = \epsilon \quad (5.87)$$

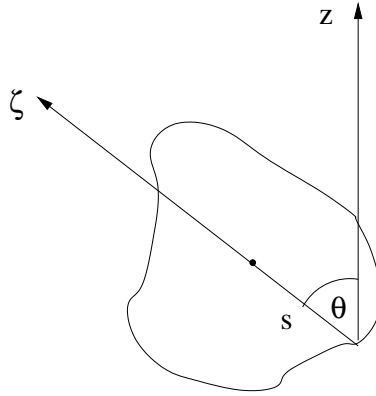


Abbildung 5.6: Schwerer symmetrischer Kreisel.

mit

$$u(\theta) = \frac{(a - b \cos \theta)^2}{2 \sin^2 \theta} + \frac{Ab^2}{2C} + \frac{mgs \cos \theta}{A}. \quad (5.88)$$

Damit kann die Bewegungsgleichung in der Form

$$t(\theta) = \int \frac{d\theta}{\sqrt{2[\epsilon - u(\theta)]}} \quad (5.89)$$

aufgeschrieben und das Integral gelöst werden. Ist die Umkehrfunktion $\theta = \theta(t)$ bestimmt, so können durch Einsetzen in die verbleibenden Erhaltungssätze die Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ berechnet werden. Damit ist im Prinzip das Problem des schweren symmetrischen Kreisels gelöst.

Schnell rotierender schwerer symmetrischer Kreisel Wir wollen die allgemeine Lösungsstrategie nun auf den Spezialfall eines schweren symmetrischen Kreisels anwenden, dessen Figurenachse parallel zur Erdoberfläche liegen soll, und der schnell um diese Achse rotiert. Die Anfangsbedingungen für diese Bewegung für $t = 0$ sind dann

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\pi}{2}, & \varphi &= 0, & \psi &= 0, \\ \dot{\theta} &= 0, & \dot{\varphi} &= 0, & \dot{\psi} &= \dot{\psi}_0. \end{aligned} \quad (5.90)$$

Die Integrationskonstanten a , b und ϵ werden damit zu

$$a = 0, \quad b = \frac{C}{A} \dot{\psi}_0, \quad \epsilon = \frac{C}{2A} \dot{\psi}_0^2 = \frac{A}{2C} b^2. \quad (5.91)$$

Die Bewegungsgleichung nimmt damit die Form

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}b^2 \cot^2 \theta + \frac{mgs}{A} \cos \theta = 0 \quad (5.92)$$

an. Umgeschrieben auf den Winkel $\delta = \theta - \pi/2$ lautet diese Gleichung

$$\frac{1}{2}\dot{\delta}^2 + \tilde{u}(\delta) = 0, \quad \tilde{u}(\delta) = \frac{1}{2}b^2 \tan^2 \delta - \frac{mgs}{A} \sin \delta. \quad (5.93)$$

Diese Gleichung hat nur dort Lösungen, wo $\tilde{u}(\delta) < 0$ ist. Für große Rotationsgeschwindigkeit $\dot{\psi}_0$ und damit größer werdendem b wird der erlaubte Bereich für δ immer kleiner. Wenn also der Kreisel genügend schnell um die Figurenachse in Bewegung gesetzt wird, können die trigonometrischen Funktionen für kleine δ entwickelt werden, und es gilt näherungsweise

$$\frac{1}{2}\dot{\delta}^2 + \frac{1}{2}b^2\delta^2 - \frac{mgs}{A}\delta = 0. \quad (5.94)$$

Dies ist aber die Energie eines harmonischen Oszillators mit Eigenfrequenz b , der durch eine konstante 'Kraft' mgs/A aus seiner Ruhelage $\delta = 0$, $\dot{\delta} = 0$ bei $t = 0$ ausgelenkt wird,

$$\ddot{\delta} + b^2\delta = \frac{mgs}{A}. \quad (5.95)$$

Dessen Lösung haben wir in der Vorlesung Mathematische Methoden bestimmt, und sie lautet

$$\delta = \frac{mgs}{b^2A} [1 - \cos(bt)] = \frac{mgsA}{C^2\dot{\psi}_0^2} \left[1 - \cos\left(\frac{C}{A}\dot{\psi}_0 t\right) \right]. \quad (5.96)$$

Die Figurenachse oszilliert damit mit kleiner Amplitude $2mgsA/(C^2\dot{\psi}_0^2)$ und großer Frequenz $C\dot{\psi}_0/A$ in vertikaler Richtung. Diese Bewegung wird **Nutation** genannt. Die Kreiselachse wird also trotz des Wirkens der Schwerkraft nur wenig ausgelenkt.

In der gleicher Näherung kleiner δ werden die Erhaltungssätze, die aus den zyklischen Koordinaten folgen,

$$A\dot{\varphi} - C\dot{\psi}_0\delta = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \varphi = \frac{mgs}{C\dot{\psi}_0} \left[t - \frac{A}{C\dot{\psi}_0} \sin\left(\frac{C}{A}\dot{\psi}_0 t\right) \right]. \quad (5.97)$$

Die Figurenachse bewegt sich somit mit einer mittleren Winkelgeschwindigkeit von $mgs/(C\dot{\psi}_0)$ zusätzlich um die z -Achse. Diese Bewegung wird **Präzession** genannt. Schlussendlich folgt in derselben Näherung

$$\dot{\psi} = \dot{\psi}_0, \quad (5.98)$$

der Kreisel dreht sich also mit der ihm anfangs gegebenen konstanten Winkelgeschwindigkeit um seine Figurenachse.

5.4 Dynamik des Wendekreises (tippe top)

Nicht jeder Kreisel läßt sich in so einer einfachen Weise beschreiben wie die oben genannten Spezialfälle. Ein interessantes Beispiel (und nettes Spielzeug) ist der **Wendekreis** (engl.: tippe top), der in Abb. 5.7 gezeigt ist. Er be-

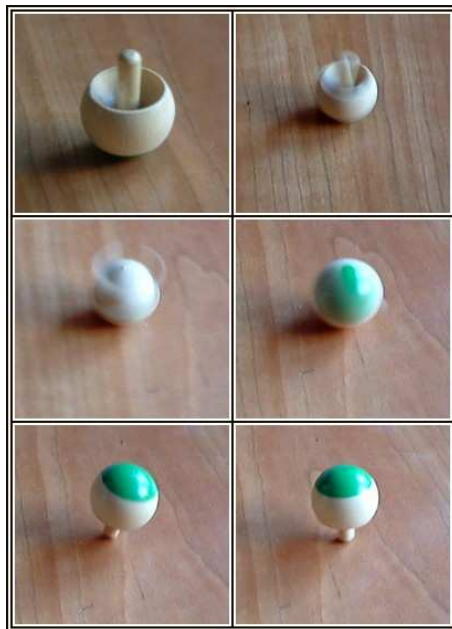


Abbildung 5.7: Der Wendekreis.

steht aus einem kugelförmigen Kreiselkörper und einem kurzen Stiel. Wird der Wendekreis in Rotation um seine Symmetrieachse versetzt, dreht sich der Kreisel um und rotiert auf seinem Stiel weiter. Interessant daran ist, dass sich dabei der Schwerpunkt des Kreisels gegen die Schwerkraft anhebt

und somit kinetische Energie aus der Rotation entnommen werden muss. Das heisst aber, dass der Drehimpuls, der nach oben gerichtet ist, abnehmen muss, wozu nach der Drehimpulsbilanzgleichung ein nach oben gerichtetes Drehmoment nötig ist. Allerdings kann dafür die Schwerkraft nicht verantwortlich sein, weil sie selbst in vertikaler Richtung zeigt. Für ein vertikales Drehmoment ist also eine horizontale Kraft erforderlich. Die einzige Kraft, die dafür in Frage kommt, ist die Reibungskraft zwischen dem Kreiselkörper und der Unterlage.

Bei der Rotation des Kreisels auf der Unterlage wirkt die Reibung der Bewegung des Kreisels entgegen, die Reibungskraft ist also in guter Näherung parallel zur Unterlage gerichtet. Legen wir das körperfeste Bezugssystem im Kreisel so, dass die ζ -Achse in Richtung des Stiels zeigt, dann zeigt die Reibungskraft gerade in Richtung der Knotenlinie. Diese führt zu einem Drehmoment um den Schwerpunkt, das (für einen aufrecht stehenden Kreisel) eine negative Komponente in z -Richtung und eine Komponente in horizontaler Richtung besitzt. Das heisst, dass sich der Kreisel langsam umdreht. Die Analyse dieser Bewegung ist analytisch aber nicht vollständig möglich und es muss auf numerische Methoden zurückgegriffen werden. Auf den Webseiten der Universität Augsburg gibt es eine schöne Animation zu diesem Thema. Eine interessante Arbeit mit Details zum physikalischen Ansatz und den Simulationen erschien im American Journal of Physics im Jahre 1977.