

# Kapitel 4

## Lagrangesche Mechanik

### 4.1 Das d'Alembertsche Prinzip

#### 4.1.1 Freie und gebundene Systeme

Von unserem derzeitigen Stand unserer Untersuchungen zu Bewegungen von Massenpunktsystemen könnte man versucht sein, jeden Körper in eine (möglicherweise sehr große) Anzahl von Massenpunkten zu zerlegen, die alle miteinander wechselwirken. Dabei gibt es eine wesentliche Schwierigkeit. Man müsste für einen makroskopisch großen Körper in der Größenordnung von  $10^{23}$  Massenpunkte betrachten, was zur Auswertung von  $3 \cdot 10^{23}$  gekoppelten Differentialgleichungen führt, was unmöglich realisierbar ist. Zum Vergleich: setzt man einen Petaflopcomputer an, der also etwa  $10^{15}$  Rechenoperationen pro Sekunde ausführt, würden etwa 10 Jahre vergehen, bis dieser Computer überhaupt  $3 \cdot 10^{23}$  elementare Operationen ausgeführt, damit aber noch lange keine Differentialgleichung gelöst, hat.

Deswegen ist es (nicht nur hier in der Mechanik) sinnvoll, die Gesamtheit der betrachteten Körper aufzuteilen in ein möglichst kleines Objekt, dessen Dynamik es genauer zu untersuchen gilt, und eine Umgebung, die auf das zu untersuchende Objekt wirkt, dessen interne Dynamik aber nicht weiter untersucht wird. Dabei wird vorausgesetzt, dass das Objekt nicht wesentlich auf die Umgebung zurückwirkt.

Eine typische Situation ist die Bewegung eines Körpers auf einer geeigneten Ebene (siehe Abb. 4.1). Auf den Körper wirkt zum einen natürlich die Gravitationskraft, die ihn beschleunigt. Zum anderen wirken auf ihn Kräfte, die von der geeigneten Ebene ausgeübt werden und die den Körper zwingen,

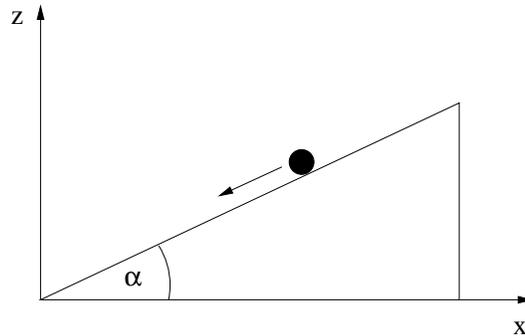


Abbildung 4.1: Geneigte Ebene, die eine Zwangsbedingung auf den Körper ausübt.

auf der Oberfläche entlangzugleiten und nicht in die geneigte Ebene einzudringen oder gar durch sie durchzufallen. Es ist damit sinnvoll, den Körper als das zu betrachtende Objekt und die schiefe Ebene als Umgebung anzusehen, deren einzige Aufgabe es ist, **Zwangskräfte** auf den Körper auszuüben und ihn auf eine Bewegung auf der Oberfläche zu zwingen. Die Bewegung des Körpers ist damit nicht mehr **frei**, sondern **gebunden**. Mathematisch ausgedrückt heisst das, dass der Bahnkurve **Bedingungsgleichungen** auferlegt werden. Im Falle der geneigten Ebene hat diese Bedingung die einfache Form

$$x \sin \alpha - z \cos \alpha = 0. \quad (4.1)$$

Die Bahnkurve ist also auf solche Werte für  $x(t)$  und  $z(t)$  eingeschränkt, die der Bedingung (4.1) genügen.

### 4.1.2 Zwangsbedingungen

Betrachten wir nun ein Massenpunktsystem aus  $N$  Massenpunkten, deren Bewegung gebunden ist. Wir werden zunächst die möglichen Nebenbedingungen klassifizieren, die der Newtonschen Dynamik aufgeprägt sein können. Die  $3N$  Bewegungsgleichungen wollen wir im Gegensatz zum vorherigen Kapitel so durchnummerieren, dass jeder Freiheitsgrad mit einem Index von 1 bis  $3N$  bedacht wird. Das Grundgesetz der Mechanik lautet dann

$$m_i \ddot{x}_i = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, 3N. \quad (4.2)$$

Es ist klar, dass die drei Massen, die zu einem Massenpunkt gehören, als gleich angesehen werden. Zum Beispiel wäre  $m_1 = m_2 = m_3$  die Masse des

ersten Körpers. Die Massenpunkte können durch verschiedene Arten von Bindungen in ihrer Bewegung eingeschränkt sein:

- **äußere Bindungen:** Bindungen an feste Flächen oder Kurven im Raum;
- **innere Bindungen:** Einschränkung der relativen Lagen der Massenpunkte.

Diese Bindungen können als Nebenbedingungen formuliert werden, die in die folgenden vier Grundtypen eingeteilt werden können.

### Holonome Nebenbedingungen

Holonome Nebenbedingungen lassen sich in der Form von algebraischen Bedingungen der Art

$$f_k(x_1, x_2, \dots, x_{3N}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, r \quad (4.3)$$

formulieren. Es handelt sich dabei um insgesamt  $r$  Nebenbedingungen, die den  $N$  Massenpunkten auferlegt werden. Offensichtlich kann  $r$  nicht die Zahl  $3N$  der Bewegungsgleichungen übersteigen, die Größe

$$f = 3N - r \quad (4.4)$$

ist dann die Anzahl der **Freiheitsgrade** des Massenpunktsystems.

Bildet man die totale zeitliche Ableitung, so erhält man mit

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f_k}{\partial t} = 0 \quad (4.5)$$

eine äquivalente Beschreibung der holonomen Nebenbedingungen. In differentieller Form lautet diese Beziehung auch

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_k}{\partial t} dt = 0. \quad (4.6)$$

## Anholonome Nebenbedingungen

Anholonome Nebenbedingungen lassen sich nicht in einer algebraischen, sondern nur in differentieller Form

$$\sum_{i=1}^{3N} f_{ki}(x_j, t) \dot{x}_i + f_{k0}(x_j, t) = 0 \quad (4.7)$$

formulieren, was wiederum äquivalent zu

$$\sum_{i=1}^{3N} f_{ki}(x_j, t) dx_i + f_{k0}(x_j, t) dt = 0 \quad (4.8)$$

ist. Dabei wird vorausgesetzt, dass sich die Funktionen  $f_{ki}(x_j, t)$  und  $f_{k0}(x_j, t)$  für gegebenes  $k$  nicht zu einem vollständigen Differential zusammenfassen lassen. Wenn das möglich wäre, hätten wir es schließlich mit einer holonomen Nebenbedingung zu tun.

Das Standardbeispiel einer anholonomen Nebenbedingung ist die Bewegung eines Schlittschuhs auf dem Eis. Wir können den Schlittschuh als eine kurze Gerade annehmen, was einem Massenpunkt mit einem inneren Freiheitsgrad, dem Winkel  $\varphi$  der Kufe mit der  $x$ -Achse, entspricht. Da sich der Schlittschuh nur entlang der Kufenrichtung, aber nicht senkrecht zu ihr bewegen kann, lautet die Nebenbedingung

$$\dot{y} \cos \varphi - \dot{x} \sin \varphi = 0. \quad (4.9)$$

Diese kann aber nicht in die algebraische Form  $f(x, y, \varphi) = 0$  gebracht werden, weil es dann möglich wäre, den Winkel  $\varphi$  an jedem Ort festzulegen. Andererseits sieht man schon der differentiellen Form  $\cos \varphi dy - \sin \varphi dx = 0$  an, dass es keinen integrierenden Faktor geben kann, weil der Term mit  $d\varphi$  fehlt (wir erinnern uns, dass als Bedingung für die Existenz eines integrierenden Faktors galt, dass die gemischten partiellen Ableitungen gleich sein müssen, also dass z.B.  $f_{x\varphi} = f_{\varphi x}$  gelten muss, was hier offensichtlich nicht der Fall ist).

Als anholonome Nebenbedingungen werden auch solche Einschränkungen bezeichnet, die sich nur durch eine Ungleichung ausdrücken lassen. Solche einseitigen (unilaterale) Bindungen treten dann auf, wenn ein Massenpunkt in einen bestimmten Raumbereich nicht eindringen darf. Das ist beispielsweise bei einem Skispringer der Fall, der zuerst auf der Schanze entlanggleitet, bis er am Schanzentisch abhebt.

Im allgemeinen werden sowohl anholonome als auch holonome Nebenbedingungen gemeinsam ein physikalisches System einschränken. In diesem Fall gemischter Bindungen werden wir trotzdem von anholonomen Nebenbedingungen sprechen.

### Skleronome Nebenbedingungen

Eine zweite Art der Kategorisierung von Nebenbedingungen erhält man über die zeitliche Abhängigkeit der Bedingungen. Skleronome Nebenbedingungen sind solche, die nicht explizit von der Zeit abhängen. Für holonome Nebenbedingungen heisst das, dass

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} = 0 \quad (4.10)$$

sein muss, für anholonome Bedingungen muss

$$\frac{\partial f_{ki}}{\partial t} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 3N, \quad f_{k0} = 0 \quad (4.11)$$

gelten.

### Rheonome Nebenbedingungen

Im Gegensatz dazu sind rheonome Nebenbedingungen explizit zeitabhängig.

Im allgemeinen Fall von  $r$  Nebenbedingungen wird es meist unterschiedliche Bedingungen geben. Einige davon werden holonom, andere anholonom Natur sein. Alle diese Nebenbedingungen können entweder skleronom oder rheonom sein, was in den einzelnen Fällen überprüft werden muss.

### 4.1.3 Das d'Alembertsche Prinzip

Die Nebenbedingungen, die die Bewegung eines Massenpunktes einschränken, sind gleichbedeutend mit der Wirkung von Zwangskräften, die den Massenpunkt auf eine bestimmte Bahn zwingen. Diese Zwangskräfte wirken zusätzlich zu den eingepprägten Kräften, die im Inertialsystem wirken, und müssen damit in den Bewegungsgleichungen mitgenommen werden. Wir schreiben also

$$m_i \ddot{x}_i = F_i + \tilde{F}_i, \quad i = 1, 2, \dots, 3N, \quad (4.12)$$

wobei  $F_i$  die eingepprägten Kräfte und  $\tilde{F}_i$  die Zwangskräfte bezeichnen sollen. Zu diesen  $3N$  Bewegungsgleichungen kommen dann noch die  $r$  Nebenbedingungen hinzu. Das heisst aber, dass wir zur Lösung der Bewegungsgleichungen unter gleichzeitiger Erfüllung der Nebenbedingungen eine Relation zwischen den Zwangskräften und den Nebenbedingungen herstellen müssen.

Wir führen zunächst den Begriff der **virtuellen Verrückung**  $\delta x_i$  ein. Diese sollen mit den Nebenbedingungen vereinbar sein und infinitesimal kleine Auslenkungen des Systems darstellen, die momentan geschehen sollen ( $\delta t = 0$ ) und damit nur gedacht und deshalb virtuell sind. Echte oder reale Verrückungen würden  $\delta t \neq 0$  haben und sind damit anderen Ursprungs.

Bei holonomen Nebenbedingungen drückt sich eine virtuelle Verrückung dadurch aus, dass der Term mit  $dt$  in Gl. (4.6) fehlt und es gilt

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \delta x_i = 0, \quad (4.13)$$

während für anholonome Nebenbedingungen aus Gl. (4.8) folgt, dass für virtuelle Verrückungen

$$\sum_{i=1}^{3N} f_{ki} \delta x_i = 0 \quad (4.14)$$

gilt.

Das **d'Alembertsche Prinzip** stellt nun eine Verknüpfung zwischen Zwangskräften und Nebenbedingungen in der folgenden Art her: Es besagt, dass Zwangskräfte bei virtuellen Verrückungen keine Arbeit leisten,

$$\sum_{i=1}^{3N} \tilde{F}_i \delta x_i = 0. \quad (4.15)$$

Offensichtlich ist diese Aussage äquivalent dazu, dass bei der Bewegung des Massenpunktes entlang einer vorgegebenen Raumkurve oder Fläche die Zwangskräfte immer senkrecht zu diesen Flächen bzw. Kurven steht. Bei anderen Nebenbedingungen ist die Interpretation nicht ganz so offensichtlich. An dieser Stelle soll wiederum darauf hingewiesen werden, dass das d'Alembertsche Prinzip ebenso wie die Newtonschen Gesetze auf Erfahrungswerten beruht und nicht bewiesen werden kann.

Das d'Alembertsche Prinzip (4.15) kann mit den Newtonschen Bewegungsgleichungen  $\tilde{F}_i = m_i\ddot{x}_i - F_i$  in die alternative Form

$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i\ddot{x}_i - F_i)\delta x_i = 0 \quad (4.16)$$

gebracht werden, in der die Zwangskräfte eliminiert sind. Zusammen mit den  $r$  Nebenbedingungen müssen die obigen Gleichungen gelöst werden. Wir hatten erwähnt, dass nicht alle Zwangsbedingungen in der Form einer Gleichung geschrieben werden können. Stellen wir uns einen Skispringer vor, der am Schanzentisch abhebt. Dann ist die Zwangskraft am Absprung in die Richtung der virtuellen Verrückung gerichtet, so dass nur die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{3N} \tilde{F}_i\delta x_i = \sum_{i=1}^{3N} (m_i\ddot{x}_i - F_i)\delta x_i \geq 0 \quad (4.17)$$

gelten kann.

### Mechanisches Gleichgewicht und das Hebelgesetz

Bei der statischen Massenbestimmung hatten wir schon darauf hingewiesen, dass Gleichgewichtslagen eine besondere Rolle bei der Definition der Masse spielen. Wir wollen hier das mechanische Gleichgewicht in Bezug auf Zwangsbedingungen näher untersuchen. Im statischen Gleichgewicht sind alle Massenpunkte in Ruhe, und es gilt  $\ddot{x}_i = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, 3N$ . Damit wird aus dem d'Alembertschen Prinzip (4.17)

$$\sum_{i=1}^{3N} F_i\delta x_i \leq 0. \quad (4.18)$$

Das ist das **Prinzip der virtuellen Arbeit**: Ein Massenpunktsystem ist nur dann im Gleichgewicht, wenn die gesamte virtuelle Arbeit der am System angreifenden Kräfte verschwindet oder zumindest nicht positiv ist.

Mit diesem allgemeinen Prinzip ist die gesamte Statik abgedeckt. Allerdings ist es oft nicht einfach oder schlicht unmöglich, analytische Ausdrücke für die Bindungen anzugeben. In diesem Fall muss das System in einem Gedankenexperiment aus seiner Lage verschoben werden, die Gesamtarbeit aller eingepprägten Kräfte berechnet und zu Null gesetzt werden.

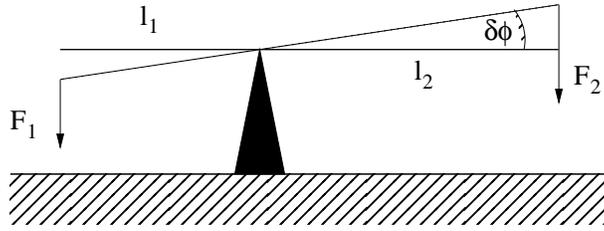


Abbildung 4.2: Illustration des Hebelgesetzes durch das d'Alembertsche Prinzip.

Ein einfaches Beispiel ist das Hebelgesetz (siehe Abb. 4.2), wie es an einer Wippe wirkt. Die einzig mögliche virtuelle Verrückung, die mit den Zwangsbedingungen vereinbar ist, ist eine Drehung um einen Winkel  $\delta\varphi$  um den Pivotpunkt (Auflagepunkt) der Hebelstange. Die virtuelle Arbeit ist damit

$$F_1 l_1 \delta\varphi - F_2 l_2 \delta\varphi = 0, \quad (4.19)$$

woraus das Hebelgesetz  $F_1 l_1 = F_2 l_2$  folgt, da die virtuelle Verrückung  $\delta\varphi$  beliebig gewählt werden kann.

#### 4.1.4 Bilanzgleichungen und Nebenbedingungen

Die für freie (ungebundene) Massenpunktsysteme aufgestellten bzw. hergeleiteten Bilanzgleichungen für Impuls, Drehimpuls und Energie bleiben natürlich gültig, solange zu den eingepprägten Kräften die Zwangskräfte hinzuaddiert werden. Dementsprechend werden wir die Zwangskräfte ebenfalls in innere und äußere Zwangskräfte aufteilen,

$$\tilde{\mathbf{F}}_i = \tilde{\mathbf{F}}_i^{(\text{ext})} + \sum_{j=1}^N \tilde{\mathbf{F}}_{ij}, \quad (4.20)$$

so dass die Impulsbilanz

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^{(\text{ext})} + \tilde{\mathbf{F}}^{(\text{ext})} \quad (4.21)$$

lautet. Analog dazu wird die Drehimpulsbilanz zu

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^{(\text{ext})} + \tilde{\mathbf{M}}^{(\text{ext})}. \quad (4.22)$$

Zur Herleitung der Energiebilanzgleichung beschränken wir uns zunächst auf skleronome Nebenbedingungen, also solche, die nicht explizit von der Zeit abhängen. Diese lassen sich laut Gl. (4.8) damit als

$$\sum_{i=1}^{3N} f_{ki} dx_i = 0 \quad (4.23)$$

schreiben. Da nun aber reale und virtuelle Verrückungen zusammenfallen,  $dx_i = \delta x_i$ , erhalten wir für die Leistung  $\tilde{P}$ , die von den Zwangskräften verrichtet wird,

$$\tilde{P} = \sum_{i=1}^{3N} \tilde{F}_i \dot{x}_i \equiv \sum_{i=1}^{3N} \tilde{F}_i \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{3N} \tilde{F}_i \frac{\delta x_i}{dt} \stackrel{\text{d'Alembert}}{=} 0. \quad (4.24)$$

Die mechanische Energiebilanzgleichung wird damit

$$\frac{dT}{dt} = P + \tilde{P} = P, \quad (4.25)$$

das heißt, es tragen zur Energiebilanz im Falle skleronomer Nebenbedingungen nur die eingepprägten Kräfte bei.

### Beispiel: ebenes mathematisches Pendel

Als Beispiel für die Anwendung des d'Alembertschen Prinzips betrachten wir die Bewegung eines Massenpunktes, der am Ende einer masselosen Stange der Länge  $l$  festgemacht ist, die sich selbst um eine feste Achse drehen kann. Damit werden die Nebenbedingungen in Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} \text{Bewegung in einer Ebene: } z = 0 &\rightsquigarrow \delta z = 0, \\ \text{feste Länge der Stange: } \varrho = l &\rightsquigarrow \delta \varrho = 0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems berechnet sich aus der Differenz der Anzahl der Koordinaten der Massenpunkte und der Nebenbedingungen. In unserem Fall bewegt sich ein Massenpunkt im dreidimensionalen Raum unter dem Einfluss zweier skleronomer Nebenbedingungen, damit existiert nur noch ein Freiheitsgrad. Die virtuelle Verrückung ist somit

$$\delta \mathbf{r} = \delta \varrho \mathbf{e}_\varrho + \varrho \delta \varphi \mathbf{e}_\varphi + \delta z \mathbf{e}_z = \varrho \delta \varphi \mathbf{e}_\varphi. \quad (4.27)$$

Die eingeprägte Kraft ist die Schwerkraft

$$\mathbf{F} = mg\mathbf{e}_x = mg \cos \varphi \mathbf{e}_\varrho - mg \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi. \quad (4.28)$$

Aus dem d'Alembertschen Prinzip und der Darstellung der Beschleunigung in Zylinderkoordinaten, Gl. (2.42), folgt somit

$$(m\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{F}) \cdot \delta \mathbf{r} = m(\varrho\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\dot{\varrho} + g \sin \varphi)\varrho\delta\varphi = 0. \quad (4.29)$$

Da die virtuelle Verrückung  $\delta\varphi$  beliebig gewählt werden kann, muss die Gleichung

$$\varrho\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\dot{\varrho} + g \sin \varphi = 0 \quad (4.30)$$

gelten. Die Nebenbedingung  $\varrho = l$ , die dabei auch noch erfüllt sein muss, liefert die zusätzliche Bedingung  $\dot{\varrho} = 0$ , so dass die Bewegungsgleichung des einen Freiheitsgrades  $\varphi$  wie

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \quad (4.31)$$

lautet, die für kleine Auslenkungen  $\varphi \ll 1$  wegen  $\sin \varphi \approx \varphi$  in eine Schwingungsdifferentialgleichung für harmonische Schwingungen der Kreisfrequenz  $\omega = \sqrt{g/l}$  übergeht.

Wir bestimmen nun noch die Zwangskraft aus der Beziehung

$$\tilde{\mathbf{F}} = m\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{F}. \quad (4.32)$$

Die drei Komponenten der Zwangskraft sind demnach

$$\tilde{F}_\varrho = m(\ddot{\varrho} - \varrho\dot{\varphi}^2) - mg \cos \varphi = m\dot{\varphi}^2 - mg \cos \varphi, \quad (4.33a)$$

$$\tilde{F}_\varphi = m(\varrho\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\dot{\varrho}) + mg \sin \varphi = m\dot{\varphi} + mg \sin \varphi = 0, \quad (4.33b)$$

$$\tilde{F}_z = m\ddot{z} = 0. \quad (4.33c)$$

Die Zwangskraft hat somit nur eine Komponente in  $\varrho$ -Richtung, die vom Pendelstab aufgebracht werden muss, um den Massenpunkt auf seiner Bahn zu halten. Die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  können wir zusätzlich aus dem Energieerhaltungssatz bestimmen, der die Form

$$T + U = \frac{m}{2}|\dot{\mathbf{r}}|^2 - mg\varrho \cos \varphi = \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi = E \quad (4.34)$$

annimmt. Damit wird

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2}{ml^2}(E + mgl \cos \varphi) = \frac{2E}{ml^2} + 2\omega^2 \cos \varphi. \quad (4.35)$$

Die Gesamtenergie  $E$  bestimmen wir noch aus den Umkehrpunkten  $\varphi_0$ , an denen  $E = U(\varphi_0) = -mgl \cos \varphi_0$  gilt, und erhalten für die Zwangskraft

$$\tilde{F}_\varrho = -mg(3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0). \quad (4.36)$$

In den Umkehrpunkten  $\varphi = \varphi_0$  ist die Zwangskraft  $\tilde{F}_\varrho(\varphi_0) = -mg \cos \varphi_0$  gerade gleich der  $\varrho$ -Komponenten der Schwerkraft.

## 4.2 Lagrangesche Gleichungen 1. Art

Die Idee des d'Alembertschen Prinzips ist es, die Einschränkungen der Bewegung eines Massenpunktsystems durch  $r$  Nebenbedingungen auszudrücken, über die die virtuellen Verrückungen bestimmt werden. Hat man diese  $r$  Verrückungen eliminiert, bleiben  $3N - r$  frei verfügbare Verrückungen übrig, die zu den Bewegungsgleichungen unter dem Einfluss der Zwangsbedingungen führen. Dies ist gerade für komplexere Systeme mit weniger offensichtlichen Zwangsbedingungen oft sehr mühsam. Die oben angegebenen Schritte können aber auch soweit verallgemeinert werden, dass sie für beliebige Probleme mit Nebenbedingungen anwendbar werden.

Dazu gehen wir zurück zum d'Alembertschen Prinzip (4.16)

$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x_i = 0 \quad (4.37)$$

und verwenden anholonome Nebenbedingungen

$$\sum_{i=1}^{3N} f_{ki} dx_i + f_{k0} dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots, r. \quad (4.38)$$

Wir setzen nun  $dt = 0$  und multiplizieren jede einzelne der insgesamt  $k$  Gleichungen in (4.38) mit einem **Lagrangeschen Multiplikator**  $\lambda_k$  und summieren über alle diese Gleichungen,

$$\sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^{3N} \lambda_k f_{ki} \delta x_i = 0. \quad (4.39)$$

Die so entstandene Gleichung wird nun von (4.37) abgezogen mit dem Ergebnis

$$\sum_{i=1}^{3N} \left( m_i \ddot{x}_i - F_i - \sum_{k=1}^r \lambda_k f_{ki} \right) \delta x_i = 0. \quad (4.40)$$

In dieser Gleichung stecken  $3N - r$  frei wählbare Verrückungen  $\delta x_i$ , also eine pro Freiheitsgrad. Die anderen  $r$  Verrückungen sind durch die Nebenbedingungen gebunden. Die Lagrangeschen Multiplikatoren sind bisher noch frei wählbar, wir wählen sie nun genau so, dass für die  $r$  nicht frei wählbaren Verrückungen gerade die Ausdrücke in den Klammern verschwinden. Die übrigen  $3N - r$  Verrückungen sind aber frei wählbar, also müssen die dazugehörigen Klammerausdrücke ohnehin verschwinden. Damit werden alle  $3N$  Klammerausdrücke in (4.40) Null, und wir bekommen die Bewegungsgleichungen in Form der **Lagrangeschen Gleichungen 1. Art** als

$$m_i \ddot{x}_i = F_i + \sum_{k=1}^r \lambda_k f_{ki}, \quad i = 1, 2, \dots, 3N. \quad (4.41)$$

Zusätzlich zu den  $3N$  Lagrangeschen Gleichungen 1. Art sind noch die  $r$  Nebenbedingungen

$$\sum_{i=1}^{3N} f_{ki} \dot{x}_i + f_{k0} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, r \quad (4.42)$$

zu erfüllen, was insgesamt  $3N + r$  Gleichungen zur Bestimmung der  $3N$  Koordinaten  $x_i$  und der  $r$  Lagrangeschen Multiplikatoren ergibt. Das Gleichungssystem ist somit eindeutig lösbar.

Die Lagrangeschen Gleichungen (4.41) liefern zusätzlich die allgemeine Darstellung der Zwangskräfte mithilfe der Lagrangeschen Multiplikatoren als

$$\tilde{F}_i = \sum_{k=1}^r \lambda_k f_{ki}. \quad (4.43)$$

Für holonome Nebenbedingungen gilt

$$\tilde{F}_i = \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i}, \quad (4.44)$$

und speziell für einen Massenpunkt  $\tilde{\mathbf{F}} = \nabla \sum_{k=1}^r \lambda_k f_k$ , was zum Ausdruck bringt, dass die Zwangskräfte senkrecht zu den Nebenbedingungen stehen.

### Beispiel: ebenes mathematisches Pendel

Wir kommen zurück zu unserem Beispiel des ebenen mathematischen Pendels, das wir mithilfe der Lagrangeschen Gleichungen 1. Art lösen wollen. Die (holonomen) Nebenbedingungen sind  $f_1 = z$  und  $f_2 = \varrho - l$ . Die Lagrangeschen Gleichungen lauten mit der eingepprägten Kraft  $\mathbf{F} = mg\mathbf{e}_x = mg \cos \varphi \mathbf{e}_\varrho - mg \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi$

$$m(\ddot{\varrho} - \varrho\dot{\varphi}^2) = mg \cos \varphi + \lambda_2, \quad (4.45a)$$

$$m(\varrho\ddot{\varphi} + 2\dot{\varrho}\dot{\varphi}) = -mg \sin \varphi, \quad (4.45b)$$

$$m\ddot{z} = \lambda_1. \quad (4.45c)$$

Differenziert man die Nebenbedingungen zweimal nach der Zeit, so finden wir  $\ddot{z} = 0$  und  $\ddot{\varrho} = 0$  und damit die Lagrangeschen Multiplikatoren

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -mg \cos \varphi - ml\dot{\varphi}^2. \quad (4.46)$$

Die verbleibende Bewegungsgleichung unter Berücksichtigung der Zwangsbedingungen ist dann

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (4.47)$$

Schlussendlich bleibt als Zwangskraft in  $\varrho$ -Richtung

$$\tilde{F}_\varrho = \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \varrho} = \lambda_2 = -mg \cos \varphi - ml\dot{\varphi}^2. \quad (4.48)$$

#### 4.2.1 Energiebilanz

Aus der Kenntnis der Zwangskräfte kann nun die Leistung der Zwangskräfte über die Lagrangeschen Multiplikatoren und die Nebenbedingungen ausgedrückt werden:

$$\tilde{P} = \sum_{i=1}^{3N} \tilde{F}_i \dot{x}_i = \sum_{k=1}^r \lambda_k \left( \sum_{i=1}^{3N} f_{ki} \dot{x}_i \right) = - \sum_{k=1}^r \lambda_k f_{k0}, \quad (4.49)$$

wobei wir Gl. (4.8) benutzt haben. Die Energiebilanz wird damit zu

$$\frac{dT}{dt} = P - \sum_{k=1}^r \lambda_k f_{k0}, \quad (4.50)$$

oder, für den Fall holonomer Bindungen,

$$\frac{dT}{dt} = P - \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial t}. \quad (4.51)$$

Aus diesen Beziehungen wird klar, dass nur zu rheonomen Bindungen gehörende Zwangskräfte zur Leistung und damit zur Energiebilanz beitragen. Wenn die eingepprägten Kräfte ein Potential besitzen, so folgt für die zeitliche Änderung der mechanischen Gesamtenergie

$$\frac{d}{dt}(T + U) = \frac{\partial U}{\partial t} - \sum_{k=1}^r \lambda_k f_{k0}. \quad (4.52)$$

Damit folgt als Verallgemeinerung unserer früheren Aussage, dass nur dann Energieerhaltung gilt, wenn das System konservativ und skleronom ist.

### 4.3 Generalisierte Koordinaten

Das d'Alembertsche Prinzip erlaubt es, die Bewegungsgleichungen für die  $3N$  Koordinaten unter dem Einfluss von  $r$  Nebenbedingungen so auszuwerten, dass nach Eliminierung der abhängigen virtuellen Verrückungen noch  $3N - r$  Bewegungsgleichungen übrigbleiben, die aber immer noch alle  $3N$  Koordinaten enthalten. Zusammen mit den  $r$  Nebenbedingungen sind das immer noch  $3N$  zu lösende Gleichungen, die erst nach Eliminierung von  $r$  Variablen aus den Nebenbedingungen in die  $3N - r$  unabhängigen Bewegungsgleichungen für die Freiheitsgrade des Massenpunktsystems übergehen.

Das allgemeine Lösungsverfahren über die Lagrangeschen Gleichungen 1. Art führt auf  $3N + r$  Gleichungen für die  $3N$  Koordinaten und die  $r$  Lagrangeschen Multiplikatoren. Eliminierung der Lagrangeschen Multiplikatoren durch Verwendung der Nebenbedingungen führt dann zu einem System aus  $3N$  Gleichungen für  $3N$  Variable. Da wir aber wissen, dass es nur  $3N - r$  Freiheitsgrade gibt, kann es also nur genau diese Anzahl von unabhängigen Variablen geben. Man kann sich also die Frage stellen, ob man ein Verfahren angeben kann, das nach Auswertung der Nebenbedingungen auf ein Gleichungssystem von exakt  $3N - r$  Gleichungen für exakt  $3N - r$  Variable führt. Solch ein Verfahren, das aber nur für holonome Systeme gilt, wollen wir nun angeben.

Die holonomen Nebenbedingungen für ein System aus  $N$  Massenpunkten lassen sich in der Form (4.6)

$$f_k(x_1, x_2, \dots, x_{3N}, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, r \quad (4.53)$$

schreiben. Dieses Gleichungssystem aus  $r$  Gleichungen läßt  $f = 3N - r$  Variable unbestimmt. Die Lösung  $x_i$  kann man also als Funktion dieser  $f$  Variabler  $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_f}$  schreiben,

$$x_i = x_i(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_f}, t), \quad i = 1, 2, \dots, 3N. \quad (4.54)$$

Die  $f$  Koordinaten selbst sind nicht mehr weiter eingeschränkt. Die Frage stellt sich deshalb, ob man nicht von vornherein einen Satz von  $f$  Variablen einführen kann, die die Nebenbedingungen automatisch erfüllen und somit den minimal möglich Satz Variabler darstellen, die zur eindeutigen Lösung des Problems vonnöten sind. Wir werden ab sofort jeden Satz von  $f$  Koordinaten, die noch lineare Kombinationen der  $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_f}$  sein können, mit

$$q_\alpha = q_\alpha(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_f}, t), \quad \alpha = 1, 2, \dots, f \quad (4.55)$$

bezeichnen. Die  $3N$  Koordinaten  $x_i$  hängen also funktional von den **generalisierten Koordinaten**  $q_\alpha$ , die keinen Nebenbedingungen unterliegen, ab,

$$x_i = x_i(q_\alpha, t) = x_i(q_1, q_2, \dots, q_f, t), \quad i = 1, 2, \dots, 3N. \quad (4.56)$$

Die zu den  $q_\alpha$  gehörenden Geschwindigkeiten  $\dot{q}_\alpha$  heißen dann **generalisierte Geschwindigkeiten**. Durch Differentiation von (4.56) finden wir zudem die Beziehung

$$\dot{x}_i = \sum_{\alpha=1}^f \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial x_i}{\partial t}, \quad (4.57)$$

aus der folgt, dass

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}. \quad (4.58)$$

Generalisierte Koordinaten sind also solche, die dem System und seinen Nebenbedingungen angepasst sind und selbst keinen Nebenbedingungen mehr unterliegen. Das Auffinden solcher Koordinaten ist somit ein wichtiger Schritt zur Lösung der Bewegungsgleichungen. In vielen Fällen kann man instinktiv einen Satz generalisierter Koordinaten angeben, so ist beim ebenen mathematischen Pendel sofort ersichtlich, dass der Winkel  $\varphi$  die generalisierte Koordinate darstellt.

## 4.4 Lagrangesche Gleichungen 2. Art

Mithilfe der generalisierten Koordinaten werden wir nun einen Satz von  $f = 3N - r$  Bewegungsgleichungen ableiten, die **Lagrangesche Gleichungen 2. Art** oder einfach nur Lagrangesche Gleichungen genannt werden. Aus Gl. (4.56) folgt für die virtuellen Verrückungen

$$\delta x_i = \sum_{\alpha=1}^f \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha. \quad (4.59)$$

Dies setzen wir in das d'Alembertsche Prinzip (4.16) ein und finden

$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \sum_{\alpha=1}^f \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha = \sum_{\alpha=1}^f \left[ \sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \right] \delta q_\alpha = 0. \quad (4.60)$$

Die Verrückungen  $\delta q_\alpha$  sind aber frei wählbar, also müssen die betreffenden Ausdrücke in eckigen Klammern individuell verschwinden,

$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, f. \quad (4.61)$$

Das sind  $f$  Bewegungsgleichungen für die  $f$  Freiheitsgrade, die es zu lösen gilt. Wir schreiben nun die einzelnen Terme in Gl. (4.61) etwas um.

Zunächst finden wir, dass

$$\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} &= \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \right) - m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_\alpha} \\ &= \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_\alpha} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \left( \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left( \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \right) \end{aligned} \quad (4.62)$$

ist, und damit

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}, \quad (4.63)$$

wobei  $T = T(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$  die kinetische Gesamtenergie ist, die in den generalisierten Koordinaten  $q_\alpha$  und den generalisierten Geschwindigkeiten  $\dot{q}_\alpha$  ausgedrückt ist.

Der zweite Term in Gl. (4.61) beschreibt die generalisierten Kräfte

$$\Phi_\alpha = \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}, \quad (4.64)$$

so dass die Bewegungsgleichungen (4.61) auf die Form

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \Phi_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, f. \quad (4.65)$$

gebracht werden können. Haben die Kräfte  $F_i$  ein Potential,

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad (4.66)$$

dann besitzen auch die generalisierten Kräfte ein Potential, und es gilt

$$\Phi_\alpha = \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} = -\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}. \quad (4.67)$$

Laut einer früheren Aussage kann das Potential nur von den generalisierten Koordinaten und der Zeit, aber nicht von den generalisierten Geschwindigkeiten abhängen,  $U = U(q_\alpha, t)$ . Das heisst aber, dass für die generalisierten Kräfte ebenso gilt, dass

$$\Phi_\alpha = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha}. \quad (4.68)$$

Wir definieren nun die **Lagrangefunktion**  $L = T - U$  und finden für sie die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, f. \quad (4.69)$$

Gleichung (4.69) sind die Lagrangeschen Gleichungen 2. Art oder einfach nur Lagrangesche Gleichungen. Es ist zu beachten, dass die Lagrangefunktion ebenfalls eine Funktion der generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten sowie der Zeit,  $L = L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$ .

An dieser Stelle soll angemerkt werden, dass Gl. (4.69) genau  $f$  Bewegungsgleichungen darstellen, also die minimal mögliche Anzahl für eine eindeutige Lösung des Problems mit  $f$  Freiheitsgraden. Es ist dabei notwendig,

zunächst die  $f$  generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten  $q_\alpha$  und  $\dot{q}_\alpha$  aus den  $3N$  Koordinaten  $x_i$  und den dazugehörigen Geschwindigkeiten  $\dot{x}_i$  und den  $r$  Nebenbedingungen zu bestimmen und die kinetische Energie und die potentielle Energie in Gl. (4.69) oder die Kräfte in Gl. (4.65) in diesem auszudrücken. Danach müssen die  $f$  Lagrangeschen Gleichungen (4.69) oder (4.65) gelöst werden.

### Beispiel: ebenes mathematisches Pendel

Wir betrachten wiederum unser Beispiel des ebenen mathematischen Pendels. Wir hatten festgestellt, dass der Massenpunkt am Ende der (masselosen) Stange nur einen Freiheitsgrad besitzt, nämlich den Winkel  $\varphi$  der Auslenkung des Pendels aus seiner Ruhelage (siehe Abb. 4.3). Die kinetische und

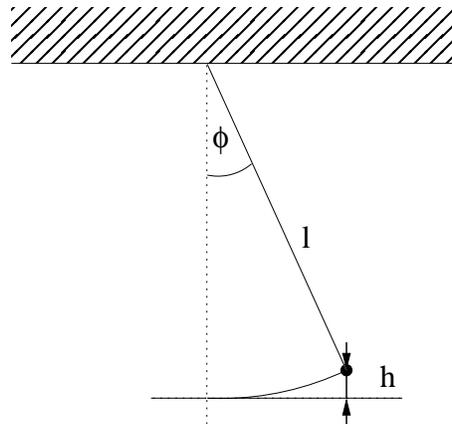


Abbildung 4.3: Ebenes mathematisches Pendel.

potentielle Energie findet man leicht zu

$$T = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2, \quad U = mgh = mgl(1 - \cos \varphi). \quad (4.70)$$

Die Lagrangeschen Gleichungen liefern dann

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = ml^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0, \quad (4.71)$$

was der uns schon bekannten Differentialgleichung entspricht.

### Beispiel: ebenes mathematisches Doppelpendel

Als erstes nichttriviales Beispiel betrachten wir die Bewegungsgleichungen eines Doppelpendels in einer Ebene (siehe Abb. 4.4). Dieses soll aus zwei

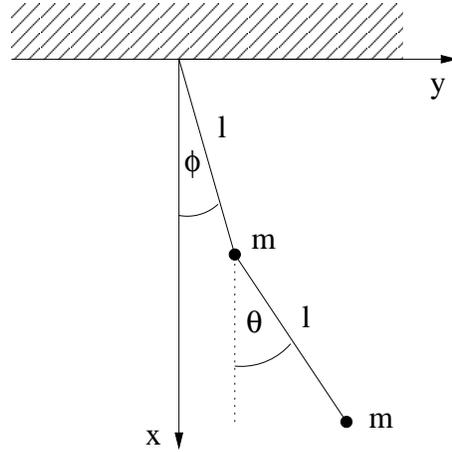


Abbildung 4.4: Ebenes mathematisches Doppelpendel mit Längen  $l_1 = l_2 = l$  und Massen  $m_1 = m_2 = m$ .

untereinander angebrachten masselosen Pendelstangen gleicher Länge  $l$  bestehen, an denen jeweils Massenpunkte der Masse  $m$  befestigt sind. Als generalisierte Koordinaten wählen wir die beiden Winkel  $\varphi$  und  $\theta$ . Damit werden die Ortsvektoren der beiden Massenpunkte zu

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(t) &= l \cos \varphi(t) \mathbf{e}_x + l \sin \varphi(t) \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{r}_2(t) &= l(\cos \varphi(t) + \cos \theta(t)) \mathbf{e}_x + l(\sin \varphi(t) + \sin \theta(t)) \mathbf{e}_y. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Die holonomen Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} f_1(x_1, y_1, x_2, y_2) &= (x_1^2 + y_1^2) - l^2 = 0, \\ f_2(x_1, y_1, x_2, y_2) &= [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] - l^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.73)$$

sind damit bei der Wahl der generalisierten Koordinaten berücksichtigt.

Für die Lagrangefunktion benötigen wir kinetische und potentielle Energien, die sich wie folgt bestimmen lassen:

$$\begin{aligned} T = T_1 + T_2 &= \frac{m}{2} l^2 \left[ 2\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\theta}(\cos \varphi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta) \right] \\ &= \frac{m}{2} l^2 \left[ 2\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos(\varphi - \theta) \right], \end{aligned} \quad (4.74)$$

$$U = U_1 + U_2 = -mgl(2 \cos \varphi + \cos \theta). \quad (4.75)$$

Die nötigen partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -ml^2 \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin(\varphi - \theta) - 2mgl \sin \varphi, \quad (4.76)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2ml^2 \dot{\varphi} + ml^2 \dot{\theta} \cos(\varphi - \theta), \quad (4.77a)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2ml^2 \ddot{\varphi} + ml^2 \ddot{\theta} \cos(\varphi - \theta) - ml^2 \dot{\theta}(\dot{\varphi} - \dot{\theta}) \sin(\varphi - \theta), \quad (4.77b)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = ml^2 \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin(\varphi - \theta) - mgl \sin \theta, \quad (4.78)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta} + ml^2 \dot{\varphi} \cos(\varphi - \theta), \quad (4.79a)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \ddot{\theta} + ml^2 \ddot{\varphi} \cos(\varphi - \theta) - ml^2 \dot{\varphi}(\dot{\varphi} - \dot{\theta}) \sin(\varphi - \theta). \quad (4.79b)$$

Damit folgen die gekoppelten Lagrangegleichungen zu

$$2l\ddot{\varphi} + l\ddot{\theta} \cos(\varphi - \theta) + l\dot{\theta}^2 \sin(\varphi - \theta) = -2g \sin \varphi, \quad (4.80a)$$

$$l\ddot{\theta} + l\ddot{\varphi} \cos(\varphi - \theta) + l\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi - \theta) = -g \sin \theta. \quad (4.80b)$$

Dies ist ein hochgradig nichtlineares System zweier gekoppelter Differentialgleichungen zweiter Ordnung, für das es im allgemeinen keine geschlossene analytische Lösung gibt. In der Tat ist das Doppelpendel dafür bekannt, dass es chaotische Bewegungen zulässt. Bei Wolfram Research finden Sie eine schöne Anwendung für das Doppelpendel, auf YouTube einen Ausschnitt der britischen Science Comedyshow 'It's only a theory', bei dem ein Doppelpendel die Hauptrolle spielt.

Für kleine Auslenkungen kann man allerdings wie beim einfachen Pendel analytische Lösungen angeben. So werden mit

$$\sin \varphi \approx \varphi, \quad \cos(\varphi - \theta) \approx 1, \quad \dot{\varphi}^2, \dot{\theta}^2 \ll 1 \quad (4.81)$$

die Lagrangegleichungen zu

$$2\ddot{\varphi} + \ddot{\theta} + 2\frac{g}{l}\varphi = 0, \quad (4.82a)$$

$$\ddot{\theta} + \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\theta = 0. \quad (4.82b)$$

Dies sind nun die Differentialgleichungen zweier gekoppelter harmonischer Oszillatoren, die wir mit den Exponentialansätzen

$$\varphi(t) = Ae^{i\omega t}, \quad \theta(t) = Be^{i\omega t} \quad (4.83)$$

lösen wollen. Mit diesem Ansatz werden die Differentialgleichungen zu algebraischen Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} \left(2\frac{g}{l} - 2\omega^2\right) A - \omega^2 B &= 0, \\ -\omega^2 A + \left(\frac{g}{l} - \omega^2\right) B &= 0. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Damit dieses Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung für die Koeffizienten  $A$  und  $B$  hat, muss die Determinante der Koeffizienten verschwinden. Daraus folgen die Lösungen für  $\omega$  als

$$\begin{vmatrix} 2\frac{g}{l} - 2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & \frac{g}{l} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \omega_{1,2}^2 = \frac{g}{l}(2 \pm \sqrt{2}). \quad (4.85)$$

Eingesetzt in das obige Gleichungssystem findet man für die Koeffizienten

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l}(2 + \sqrt{2}) \quad \rightsquigarrow \quad B = -\sqrt{2}A, \quad (4.86)$$

$$\omega_2^2 = \frac{g}{l}(2 - \sqrt{2}) \quad \rightsquigarrow \quad B = \sqrt{2}A \quad (4.87)$$

Das heisst, dass es zwei **Normalmoden** in diesem System gibt. Die Mode mit  $\omega_1 = \sqrt{g/l(2 + \sqrt{2})}$  ist diejenige, bei der die beiden Pendel in entgegengesetzter Richtung schwingen, während die Pendel in der Mode mit  $\omega_2 = \sqrt{g/l(2 - \sqrt{2})}$  in der gleichen Richtung schwingen.

### Normalmodenanalyse als Eigenwertproblem

In vielen Fällen sind Massenpunkte paarweise untereinander durch Wechselwirkungen verbunden, so dass deren Bewegungen gekoppelt sind. Wenn die zwischen den Massenpunkten auftretenden Kräfte auch noch so geartet sind, dass sie diese nur aus ihren Gleichgewichtslagen auslenken, dann sind die resultierenden Bewegungen gekoppelte Schwingungen. Wir betrachten nun ein System von  $N$  Massenpunkten, die durch paarweise Wechselwirkungen

gekoppelt sind, die zu konservativen Kräften, demnach also zu einem Potential  $U(q_1, q_2, \dots, q_N) = U(\mathbf{q})$ , Anlass geben, dass an den Gleichgewichtslagen  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$  verschwindet. Für kleine Auslenkungen um diese Gleichgewichtslagen gilt also

$$U(\mathbf{q}) = U(\mathbf{0}) + \sum_{\alpha=1}^N \left. \frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial q_\alpha} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} q_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^N \left. \frac{\partial^2 U(\mathbf{q})}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} q_\alpha q_\beta + \dots \quad (4.88)$$

wobei die ersten Ableitungen jeweils verschwinden sollen. Da konstante Terme nicht zu den Bewegungsgleichungen beitragen, können wir also auch den Term  $U(\mathbf{0})$  vernachlässigen. Damit es sich bei den Positionen  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$  auch tatsächlich um Gleichgewichtslagen handelt, müssen alle zweiten Ableitungen positiv (oder zumindest nichtnegativ) sein. Wir definieren nun die symmetrische Matrix  $\mathbf{U}$  mit den Elementen

$$U_{\alpha\beta} \equiv \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U(\mathbf{q})}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} \geq 0, \quad (4.89)$$

so dass das Potential in der Form

$$U(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{q} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^N U_{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta \quad (4.90)$$

geschrieben werden kann.

Für die kinetische Energie nehmen wir ebenso an, dass sie sich als symmetrische quadratische Form

$$T(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^N T_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \quad (4.91)$$

in den generalisierten Geschwindigkeiten mit nichtnegativen Einträgen schreiben läßt. Dabei vernachlässigen wir der Einfachheit halber die mögliche Abhängigkeit von den generalisierten Koordinaten.

Die Lagrangegleichungen werden somit zu

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\gamma} - \frac{\partial L}{\partial q_\gamma} = \sum_{\alpha=1}^N (T_{\alpha\gamma} \ddot{q}_\alpha + U_{\alpha\gamma} q_\alpha) = 0, \quad \gamma = 1, 2, \dots, N. \quad (4.92)$$

In Matrixform lauten diese Gleichungen

$$\mathbf{T} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{U} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (4.93)$$

Es handelt sich also wie erwartet um gekoppelte harmonische Oszillatoren, dessen **Eigenschwingungen** über den Exponentialansatz  $q_\alpha = A_\alpha e^{i\omega t}$  erhalten werden. Die  $N$  charakteristischen Polynome lauten demnach

$$-\omega^2 \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{U} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad (4.94)$$

Für die Existenz nichttrivialer Lösungen für die Amplituden  $A_\alpha$  fordern wir wieder, dass die Determinante der Koeffizienten verschwindet,

$$\det(\mathbf{U} - \omega^2 \mathbf{T}) = 0. \quad (4.95)$$

Gleichung (4.95) ist ein **Eigenwertproblem** für die Matrix  $\mathbf{U}$  mit den Eigenwerten  $\omega^2$ , den Eigenfrequenzen des Problems. Aus der Lösung des Eigenwertproblems (4.95) folgt zusätzlich eine Matrix  $\mathbf{D}$ , deren Spalten aus den gemeinsamen **Eigenvektoren** der Matrizen  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{T}$  besteht. Da sowohl  $\mathbf{U}$  als auch  $\mathbf{T}$  symmetrische Matrizen sind, ist  $\mathbf{D}$  eine orthogonale Matrix,  $\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{D}^T$ . Die Matrix  $\mathbf{D}$  diagonalisiert die Matrizen  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{T}$ , so dass

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^T = \mathbf{I}, \quad \mathbf{D} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{D}^T = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_N^2 \end{pmatrix} \quad (4.96)$$

gilt. Die dazugehörigen **Eigenmoden** oder **Normalmoden** erhält man aus der Linearkombination  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{q}$  der ursprünglich gekoppelten generalisierten Koordinaten. Zu bemerken sei noch, dass die Matrix  $\mathbf{D}$  damit auch die Lagrangefunktion

$$L = T - U = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \mathbf{q} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{q} - U(\mathbf{0}) \quad (4.97)$$

diagonalisiert.

Diese Art von gekoppelten Schwingungen treten bei einer Vielzahl physikalischer Vielteilchenprobleme auf, wie zum Beispiel bei der Berechnung von Molekülschwingungen oder in der Festkörperphysik bei Gitterschwingungen eines Kristalls.

### 4.4.1 Invarianz der Lagrangeleichungen unter Transformationen

#### Eichtransformationen

Die Lagrangefunktion  $L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$  eines Systems ist allerdings nicht eindeutig definiert. Betrachten wir zwei Lagrangefunktionen  $L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$  und  $L'(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$ , die sich um eine totale zeitliche Ableitung einer beliebigen Funktion  $R(q_\alpha, t)$  der generalisierten Koordinaten und der Zeit unterscheiden,

$$L' = L + \frac{d}{dt}R(q_\alpha, t). \quad (4.98)$$

Dann gilt für die Ableitungen

$$\frac{dR}{dt} = \sum_{\alpha=1}^f \frac{\partial R}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial R}{\partial t}, \quad (4.99)$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial R}{\partial q_\alpha} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \frac{dR}{dt}, \quad (4.100)$$

$$\frac{\partial L'}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \frac{dR}{dt}. \quad (4.101)$$

Damit folgt für die Lagrangegleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L'}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}. \quad (4.102)$$

Beide Lagrangefunktionen führen also zu den gleichen Bewegungsgleichungen (**Eichtransformation**). Die Lagrangefunktion  $L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$  ist also nur bis auf eine totale zeitliche Ableitung einer beliebigen Funktion  $R(q_\alpha, t)$  der generalisierten Koordinaten und der Zeit bestimmt.

#### Koordinatentransformationen

Wir wollen nun zeigen, dass auch die Wahl der generalisierten Koordinaten nicht eindeutig ist, sondern dass eine Koordinatentransformation der Form

$$q_\alpha \mapsto Q_\mu = Q_\mu(q_\alpha, t) \quad (4.103)$$

zu den gleichen Lagrangegleichungen führt. Die Umkehrtransformation lautet also

$$q_\alpha = q_\alpha(Q_\mu, t), \quad \dot{q}_\alpha = \dot{q}_\alpha(Q_\mu, \dot{Q}_\mu, t). \quad (4.104)$$

Gleichzeitig finden wir für die generalisierten Geschwindigkeiten

$$\dot{q}_\alpha = \frac{dq_\alpha}{dt} = \sum_{\mu=1}^f \frac{\partial q_\alpha}{\partial Q_\mu} \dot{Q}_\mu + \frac{\partial q_\alpha}{\partial t} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial q_\alpha}{\partial Q_\mu} = \frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial \dot{Q}_\mu}. \quad (4.105)$$

Wir berechnen nun die Lagrangegleichungen für die transformierte Lagrangefunktion  $L'(Q_\mu, \dot{Q}_\mu, t)$  in den neuen Koordinaten. Dazu berechnen wir die notwendigen partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial L'}{\partial Q_\mu} = \sum_{\alpha=1}^f \left( \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \frac{\partial q_\alpha}{\partial Q_\mu} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial Q_\mu} \right), \quad (4.106)$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_\mu} = \sum_{\alpha=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial \dot{Q}_\mu} = \sum_{\alpha=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{\partial q_\alpha}{\partial Q_\mu}, \quad (4.107)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_\mu} = \sum_{\alpha=1}^f \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \frac{\partial q_\alpha}{\partial Q_\mu} + \sum_{\alpha=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial q_\alpha}{\partial Q_\mu} \right). \quad (4.108)$$

Damit ergeben sich die Lagrangegleichungen für die transformierte Lagrangefunktion zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_\mu} - \frac{\partial L'}{\partial Q_\mu} &= \sum_{\alpha=1}^f \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \right) \frac{\partial q_\alpha}{\partial Q_\mu} \\ &+ \sum_{\alpha=1}^f \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial q_\alpha}{\partial Q_\mu} - \frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial Q_\mu} \right) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}. \end{aligned} \quad (4.109)$$

Der erste Klammerausdruck verschwindet, weil die untransformierte Lagrangefunktion  $L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$  die Lagrangegleichungen erfüllt. Den zweiten Klammerausdruck formen wir mithilfe von Gl. (4.105) um in

$$\frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial Q_\mu} = \sum_{\nu=1}^f \frac{\partial q_\alpha}{\partial Q_\mu \partial Q_\nu} \dot{Q}_\nu + \frac{\partial q_\alpha}{\partial Q_\mu \partial t} = \frac{d}{dt} \frac{\partial q_\alpha}{\partial Q_\mu}. \quad (4.110)$$

Damit verschwindet auch der zweite Klammerausdruck und wir finden, dass die transformierte Lagrangefunktion  $L'(Q_\mu, \dot{Q}_\mu, t)$  ebenfalls die Lagrangegleichungen erfüllt.

## 4.4.2 Freie Systeme und generalisierte Impulse

Obwohl wir die Lagrangeschen Gleichungen für holonome Bindungen hergeleitet haben, wird deutlich, dass sie auch für freie Systeme gelten. In diesem Fall ist einfach die Anzahl der Koordinaten gleich der Anzahl der Freiheitsgrade. Die einzige Einschränkung ist, dass für die Anwendung von Gl. (4.69) die eingepprägten Kräfte ein Potential besitzen müssen, das allerdings auch zeitabhängig sein kann. Die eingepprägten Kräfte müssen also nur Potentialkräfte und nicht notwendigerweise konservativ sein.

Die Lagrangeschen Gleichungen 2. Art werden manchmal in der Theoretischen Physik, ähnlich den Newtonschen Axiomen und dem d'Alembertschen Prinzip, als eines der fundamentalen Bausteine angesehen. Feldtheorien wie die Elektrodynamik, und speziell Quantenfeldtheorien wie die Quantenelektrodynamik oder Yang–Mills-Theorien, postulieren eine Lagrangefunktion  $L$ , aus der dann sämtliche Bewegungsgleichungen und daraus abgeleitete physikalische Konzepte folgen.

Es soll noch einmal betont werden, dass die Lagrangefunktion, und damit die kinetische und potentielle Energien, eine Funktion der generalisierten Koordinaten  $q_\alpha$  und Geschwindigkeiten  $\dot{q}_\alpha$  ist. Wir definieren nun die **generalisierten Impulse**  $p_\alpha$  über

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}. \quad (4.111)$$

Mit den Lagrangeschen Gleichungen in der Form (4.65) finden wir für deren zeitliche Änderung

$$\dot{p}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + \Phi_\alpha, \quad (4.112)$$

sie enthält also neben den generalisierten Kräften  $\Phi_\alpha$  auch noch die Ableitungen der kinetischen Energie nach der generalisierten Koordinate.

Für freie Systeme können wir die Lagrangefunktion als

$$L = \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 - U(x_1, x_2, \dots, x_{3N}, t) \quad (4.113)$$

schreiben, wenn wir voraussetzen, dass ein Potential existiert. Die generalisierten Impulse sind hier identisch mit den gewöhnlichen Impulsen,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i, \quad (4.114)$$

da die kinetische Energie nicht explizit von den Koordinaten, sondern nur von den Geschwindigkeiten abhängt. Damit werden die generalisierten Kräfte

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i} = F_i \quad (4.115)$$

identisch zu den eingepägten Kräften. Die Lagrangeschen Gleichungen (4.69) reduzieren sich in diesem Fall zu den Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = \dot{p}_i - F_i = 0 \quad (4.116)$$

beziehungsweise der Impulsbilanzgleichung. Damit sind der Lagrangeformalismus und der Newtonsche Formalismus bei Abwesenheit von Zwangsbedingungen äquivalent.

### 4.4.3 Symmetrien und Erhaltungssätze

In der Newtonschen Mechanik spielten die Erhaltungssätze eine wichtige Rolle, da sie es ermöglichen, die Newtonschen Bewegungsgleichungen durch Verwendung von Integralen der Bewegung zu vereinfachen. Wir werden im Folgenden sehen, wie diese Erhaltungssätze aus dem Lagrangeformalismus folgen. Dazu betrachten wir Transformationen der verallgemeinerten Koordinaten und Geschwindigkeiten sowie der Zeit, die die Lagrangefunktion nicht verändern oder in eine äquivalente Form überführen. Solche Transformationen bezeichnet man als **Symmetrien** oder **Symmetrietransformationen**. Das Noether-Theorem, das wir hier nicht allgemein angeben oder beweisen wollen, folgt, dass zu jeder Symmetrietransformation ein Erhaltungssatz gehört.

#### Homogenität der Zeit, Energieerhaltung

Nehmen wir an, die Zeitverschiebung

$$t \mapsto t' = t + \delta t, \quad \delta q_\alpha = \delta \dot{q}_\alpha = 0 \quad (4.117)$$

sei eine solche Symmetrietransformation. Abgeschlossene Systeme, deren Lagrangefunktion nicht explizit von der Zeit abhängen, sind Beispiele für Systeme, die unter Zeitverschiebung invariant sind. Dann muss für die Lagrangefunktion gelten, dass

$$\delta L = L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t + \delta t) - L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) = \frac{\partial L}{\partial t} \delta t = 0 \quad (4.118)$$

und damit, weil die Zeitverschiebung  $\delta t$  frei gewählt werden kann,  $\partial L/\partial t = 0$ . Die Lagrangefunktion ändert sich also nur dann nicht bei einer Zeitverschiebung, wenn sie nicht explizit von der Zeit abhängt,

$$\delta L = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0. \quad (4.119)$$

Die Invarianz der Lagrangefunktion bei Zeitverschiebung wird als **Homogenität der Zeit** bezeichnet.

Wir wollen nun herausfinden, welche Konsequenzen diese Symmetrietransformation hat. Zu diesem Zweck betrachten wir die totale zeitliche Ableitung der Lagrangefunktion

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{\alpha=1}^f \left( \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \ddot{q}_{\alpha} \right) + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (4.120)$$

Ersetzen wir dort  $\partial L/\partial q_{\alpha}$  mithilfe der Lagrangeschen Gleichung (4.69), so finden wir

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial t} \quad (4.121)$$

oder äquivalent dazu

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{\alpha=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} - L \right) = - \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (4.122)$$

Damit folgt ein Erhaltungssatz der Form

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \sum_{\alpha=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} - L = \text{const.} \quad (4.123)$$

Da in der Lagrangefunktion nur die kinetische Energie von den generalisierten Geschwindigkeiten abhängt, muss also

$$\sum_{\alpha=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^f \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} \quad (4.124)$$

gelten. Typischerweise ist die kinetische Energie aber eine homogene Funktion zweiten Grades (also quadratisch) der Geschwindigkeiten,  $T(q_{\alpha}, \lambda \dot{q}_{\alpha}) =$

$\lambda^2 T(q_\alpha, \dot{q}_\alpha)$ , so dass wegen  $(\partial(\dot{q}_\alpha)^2/\partial\dot{q}_\alpha)\dot{q}_\alpha = 2\dot{q}_\alpha$  gilt

$$\sum_{\alpha=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - L = 2T - L = 2T - (T + U) = T + U = E = \text{const.} \quad (4.125)$$

Aus der Homogenität der Zeit folgt also der Energieerhaltungssatz.

### Homogenität des Raumes, Impulserhaltung

Als nächstes betrachten wir die Invarianz der Lagrangefunktion bei Translationen im Raum

$$\mathbf{r}_i \mapsto \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \delta\mathbf{r}, \quad \delta t = 0. \quad (4.126)$$

Die Lagrangefunktion ändert sich bei dieser Transformation um

$$\delta L = L(\mathbf{r}_i + \delta\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}_i, t) - L(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i, t) = \delta\mathbf{r} \cdot \sum_{i=1}^N \nabla_{\mathbf{r}_i} L = 0. \quad (4.127)$$

Da die Verschiebung  $\delta\mathbf{r}$  wieder frei wählbar ist, folgt daraus

$$\sum_{i=1}^N \nabla_{\mathbf{r}_i} L = \mathbf{0} \quad (4.128)$$

für eine Invarianz unter Translationen. Umgeschrieben heisst das

$$\sum_{i=1}^N \nabla_{\mathbf{r}_i} L = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \nabla_{\dot{\mathbf{r}}_i} L = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \frac{d}{dt} \mathbf{P} \quad (4.129)$$

und damit

$$\sum_{i=1}^N \nabla_{\mathbf{r}_i} L = \mathbf{0} \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{P} = \text{const.} \quad (4.130)$$

Aus der Homogenität des Raumes folgt also die Erhaltung des Gesamtimpulses. Als Beispiel kann ein abgeschlossenes System von Massenpunkten dienen, dessen Lagrangefunktion nicht von den absoluten Koordinaten der Massenpunkte ab, sondern nur von den relativen Abständen.

## Isotropie des Raumes, Drehimpulserhaltung

Unter **Isotropie des Raumes** versteht man die Invarianz der Lagrangefunktion unter räumlichen Drehungen. Wir betrachten demnach infinitesimale Drehungen der Form

$$\delta \mathbf{r}_i = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_i, \quad \delta \dot{\mathbf{r}}_i = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \dot{\mathbf{r}}_i, \quad \delta t = 0. \quad (4.131)$$

Damit dies eine Symmetrietransformation wird, muss also wieder gelten

$$\delta L = L(\mathbf{r}_i + \delta \mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i + \delta \dot{\mathbf{r}}_i, t) - L(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i, t) = 0. \quad (4.132)$$

Zunächst entwickeln wir wieder die Lagrangefunktion nach den infinitesimalen Transformationen und setzen dann die Drehungen ein:

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_{i=1}^N \delta \mathbf{r}_i \cdot \nabla_{\mathbf{r}_i} L + \sum_{i=1}^N \delta \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{r}}_i} L \\ &= \delta \boldsymbol{\varphi} \cdot \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i \times \nabla_{\mathbf{r}_i} L + \dot{\mathbf{r}}_i \times \nabla_{\dot{\mathbf{r}}_i} L) \\ &= \delta \boldsymbol{\varphi} \cdot \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i + \dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{p}_i) \\ &= \delta \boldsymbol{\varphi} \cdot \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \delta \boldsymbol{\varphi} \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{L}. \end{aligned} \quad (4.133)$$

Die infinitesimalen Drehungen  $\delta \boldsymbol{\varphi}$  können wieder beliebig gewählt werden. Damit folgt

$$\delta L = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{L} = \text{const.}, \quad (4.134)$$

das heisst, aus der Isotropie des Raumes folgt die Erhaltung des Gesamtdrehimpulses.

## Invarianz unter gleichförmiger Bewegung

Betrachten wir zum Schluss noch den Fall, dass sich das Massenpunktsystem gleichförmig mit einer Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegt. Die Transformation lautet also

$$\mathbf{r}_i \mapsto \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}t, \quad \dot{\mathbf{r}}_i \mapsto \dot{\mathbf{r}}'_i = \dot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{v}, \quad \delta t = 0. \quad (4.135)$$

Wenn die Lagrangefunktion über das Potential nur von den relativen Abständen der Massenpunkte abhängt, ändern sich diese relativen Abstände nicht. Die kinetische Energie  $T$  ist aber quadratisch in den generalisierten Geschwindigkeiten, deshalb ist die Änderung der Lagrangefunktion

$$\delta L = L' - L = \mathbf{v} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \sum_{i=1}^N m_i = \frac{d}{dt}(M\mathbf{R}\mathbf{v}) + \frac{M}{2}\mathbf{v}^2 \quad (4.136)$$

wobei  $M$  die Gesamtmasse und  $\mathbf{R}$  die Schwerpunktskoordinate des Massensystems ist.

Andererseits gilt formal

$$\delta L = \sum_{i=1}^N (\delta \mathbf{r}_i \cdot \nabla_{\mathbf{r}_i} L + \delta \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{r}}_i} L) = \sum_{i=1}^N (\mathbf{v}t \cdot \dot{\mathbf{p}}_i + \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_i) = \frac{d}{dt}(\mathbf{v}t \cdot \mathbf{P}). \quad (4.137)$$

Da sich die Bewegungsgleichungen nicht ändern, wenn zu der Lagrangefunktion eine Konstante addiert wird, können wir den Term  $M\mathbf{v}^2/2$  in Gl. (4.136) außer acht lassen und erhalten aus dem Vergleich mit Gl. (4.137) den **Schwerpunktsatz**

$$M\mathbf{R} - t\mathbf{P} = \text{const.}, \quad (4.138)$$

den wir aus den Newtonschen Bewegungsgleichungen in der Form  $M\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{P}$  hergeleitet hatten.

Zusammenfassend können wir also feststellen, dass die Invarianz der Lagrangefunktion unter einer Symmetrietransformation immer gleichbedeutend mit einem Erhaltungssatz ist. In abgeschlossenen Systemen gelten alle die hier genannten Erhaltungssätze, es gibt also 10 erhaltene Größen, die wir in der Tabelle 4.1 noch einmal zusammengefasst haben.

Invarianz unter ...	Erhaltung ...	erhaltene Größe
zeitlichen Translationen	der Gesamtenergie	$E$
räumlichen Translationen	des Gesamtimpulses	$\mathbf{P}$
räumlichen Drehungen	des Gesamtdrehimpulses	$\mathbf{L}$
gleichförmiger Bewegung	der Schwerpunktsbewegung	$M\mathbf{R} - t\mathbf{P}$

Tabelle 4.1: Symmetrietransformationen und dazugehörige Erhaltungsgrößen.

#### 4.4.4 Zyklische Koordinaten

Manche der oben angegebenen Erhaltungssätze sind sofort einsichtig, wenn man deren Auswirkungen auf die Struktur der Lagrangefunktion etwas genauer betrachtet. So haben wir schon früher gesehen, dass in einem Zentralkraftfeld der Drehimpuls eines Massenpunktsystems immer erhalten ist. Schreiben wir die Lagrangefunktion eines Massenpunktes in Kugelkoordinaten auf,

$$L = T - U = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\Theta}^2 + r^2 \sin^2 \Theta \dot{\varphi}^2 \right) - U(r), \quad (4.139)$$

so erkennt man, dass sie gar nicht von der generalisierten Koordinate  $\varphi$  abhängt, sondern nur von  $r$  und  $\Theta$ . Damit folgt wegen  $\partial L / \partial \varphi = 0$  sofort ein Erhaltungssatz

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\varphi} \sin^2 \Theta) = 0, \quad (4.140)$$

den wir als die  $z$ -Komponente des Drehimpulses identifizieren. Da aber die  $z$ -Richtung willkürlich gewählt ist, muss ein Erhaltungssatz für jede Komponente des Drehimpulses gelten.

Offensichtlich gibt es immer dann einen Erhaltungssatz, wenn die Lagrangefunktion nicht von einer generalisierten Koordinate  $q_\alpha$  abhängt. Solch ein  $q_\alpha$  heisst **zyklische Koordinate**. Für diese gilt dann

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \text{const.} \quad (4.141)$$

Es ist also sinnvoll, so viele zyklische Koordinaten wie möglich einzuführen, um die Integration der Bewegungsgleichungen zu vereinfachen. Leider findet man aber niemals so viele zyklische Koordinaten wie es insgesamt Erhaltungssätze gibt. Für einen freien Massenpunkt gibt nämlich überhaupt nur 3 generalisierte Koordinaten, währenddessen sowohl Impulserhaltung als auch Drehimpulserhaltung gelten kann, was 6 Erhaltungssätzen entspricht. Der Grund dafür ist die Nichtvertauschbarkeit (Nichtkommutativität) der räumlichen Drehungen und Translationen. Man kann also nicht mehr zyklische Koordinaten einführen als es vertauschbare Symmetrietransformationen gibt. Diese Nichtvertauschbarkeit wird uns im nächsten Kapitel beim starren Körper und später in der Quantenmechanik noch häufiger begegnen.

## 4.5 Das Hamilton-Prinzip

Wir haben bisher als Grundprinzipien der Theoretischen Mechanik die Newtonschen Gesetze kennengelernt sowie für Systeme, die Nebenbedingungen oder Zwangsbedingungen unterliegen, das d'Alembertsche Prinzip und die daraus folgenden Lagrangegleichungen 1. und 2. Art. Aus dem d'Alembertschen Prinzip läßt sich nun ein weiteres Prinzip ableiten, das häufig an die Spitze einer neuen Theorie gestellt wird. Wir betrachten dazu wieder zunächst ein holonomes System in einem endlichen Zeitintervall  $[t_1, t_2]$ . Das d'Alembertsche Prinzip

$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x_i = 0 \quad (4.142)$$

schreiben wir nun um in

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i \delta x_i = \sum_{i=1}^{3N} F_i \delta x_i + \delta \sum_{i=1}^{3N} \frac{m_i}{2} \dot{x}_i^2 = \delta W + \delta T, \quad (4.143)$$

wobei  $\delta W$  die durch die eingepprägten Kräfte geleistete virtuelle Arbeit bezeichnet und  $\delta T$  die virtuelle Änderung der kinetischen Energie. Halten wir die Koordinaten  $x_i$  an den Endpunkten  $t_1$  und  $t_2$  fest,  $\delta x_i(t_1) = \delta x_i(t_2)$ , und integrieren

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta W + \delta T) dt = \sum_{i=1}^{3N} m_i [\dot{x}_i(t_2) \delta x_i(t_2) - \dot{x}_i(t_1) \delta x_i(t_1)] = 0. \quad (4.144)$$

Nehmen wir wieder an, dass die eingepprägten Kräfte ein Potential besitzen, dann wird die virtuelle Arbeit der eingepprägten Kräfte zu

$$\delta W = \sum_{i=1}^{3N} F_i \delta x_i = - \sum_{i=1}^{3N} \delta x_i \frac{\partial}{\partial x_i} U(x_1, \dots, x_N) = -\delta U. \quad (4.145)$$

Damit folgt, dass

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0 \quad (4.146)$$

und, da die Endpunkte  $t_1$  und  $t_2$  nicht variieren, wir können die Variation vor das Integral ziehen und erhalten

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta S = 0. \quad (4.147)$$

Die Funktion  $S$  ist die sogenannte **Wirkungsfunktion** oder kurz **Wirkung**.

Gleichung (4.147) wird nun zu dem folgenden Prinzip erhoben: Die Bahnkurven sind die von den generalisierten Koordinaten  $q_\alpha(t)$  beschriebenen Kurven in einem abstrakten  $f$ -dimensional **Konfigurationsraum** der generalisierten Koordinaten  $q_\alpha$ . Das **Hamilton-Prinzip** besagt nun aus, dass sich die wirkliche vom System durchlaufene Bahnkurve von allen anderen eng benachbarten Bahnkurven dadurch auszeichnet, dass das Wirkungsintegral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) dt \quad (4.148)$$

ein Extremum, meist ein Minimum, annimmt. Dies wird durch Gl. (4.147) ausgedrückt. Man spricht demzufolge auch vom **Prinzip der kleinsten Wirkung**.

Wir müssen nun festlegen, was wir unter einer Vergleichsbahn  $q'_\alpha(t)$  verstehen wollen (siehe Abb. 4.5). Dazu verwenden wir die folgende Vorschrift:

1. Alle Bahnen haben den gleichen Anfangspunkt und Endpunkt, also

$$\begin{aligned} q'_\alpha(t_1) &= q_\alpha(t_1), & \delta q_\alpha(t_1) &= 0, \\ q'_\alpha(t_2) &= q_\alpha(t_2), & \delta q_\alpha(t_2) &= 0. \end{aligned} \quad (4.149)$$

2. Die Vergleichsbahnen sollen nahe an der realen Bahn liegen. Die generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten sollen sich also nur gering unterscheiden,

$$\begin{aligned} q'_\alpha(t) &= q_\alpha(t) + \delta q_\alpha(t), \\ \dot{q}'_\alpha(t) &= \dot{q}_\alpha(t) + \frac{d}{dt} \delta q_\alpha(t) = \dot{q}_\alpha(t) + \delta \dot{q}_\alpha(t). \end{aligned} \quad (4.150)$$

3. Der Vergleich der Bahnen findet zu gleichen Zeiten statt,

$$\delta t = 0. \quad (4.151)$$

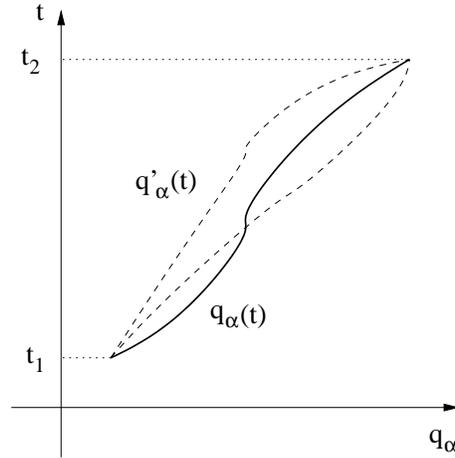


Abbildung 4.5: Vergleichsbahnen beim Hamilton-Prinzip.

Mit diesem Wirkungsprinzip haben wir effektiv die virtuellen Verrückungen des d'Alembertschen Prinzips zu ganzen virtuellen Bahnen zusammengefasst.

Wir wollen nun zeigen, wie sich die Lagrangegleichungen 2. Art aus dem Hamilton-Prinzip herleiten lassen. Dazu setzen wir die Vergleichsbahnen  $q'_\alpha(t)$  in die Lagrangefunktion ein und entwickeln diese bis zur ersten Ordnung in den infinitesimalen Verrückungen  $\delta q_\alpha(t)$  und  $\delta \dot{q}_\alpha(t)$ ,

$$L(q'_\alpha, \dot{q}'_\alpha, t) = L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) + \sum_{\alpha=1}^f \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \sum_{\alpha=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \dot{q}_\alpha. \quad (4.152)$$

Damit folgt für die Variation der Wirkung

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} [L(q'_\alpha, \dot{q}'_\alpha, t) - L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{\alpha=1}^f \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \sum_{\alpha=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \dot{q}_\alpha \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^f \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \right) + \left( \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha \right] dt. \quad (4.153) \end{aligned}$$

Den ersten Term integrieren wir aus und finden

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \sum_{\alpha=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \right) = \sum_{\alpha=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (4.154)$$

Die Randterme verschwinden aber, weil wir gefordert haben, dass die Variationen  $\delta q_\alpha$  am Anfangspunkt  $t_1$  und am Endpunkt  $t_2$  verschwinden sollen. Das Hamilton-Prinzip fordert nun das Verschwinden der Variation der Wirkung, also muss gelten, dass

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{\alpha=1}^f \left( \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha \right] dt = 0. \quad (4.155)$$

Da diese Relation für alle zugelassenen, aber ansonsten beliebigen Variationen  $\delta q_\alpha$  gelten soll, müssen die Terme in den Klammern verschwinden, die wir als die Lagrangegleichungen 2. Art identifizieren. Das heisst, dass die realen Bahnen den Lagrangegleichungen 2. Art genügen müssen.

Mithilfe des Hamilton-Prinzip kann man auch sofort einsehen, warum Eichtransformationen die Bewegungsgleichungen unverändert lassen. Addiert man nämlich zur Lagrangefunktion die totale Zeitableitung einer Funktion  $R(q_\alpha, t)$ , so ändert sich die Wirkung nur um einen konstanten Betrag,

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} \left[ L + \frac{d}{dt} R(q_\alpha, t) \right] dt = S + R[q_\alpha(t_2), t_2] - R[q_\alpha(t_1), t_1] = S + \text{const.}, \quad (4.156)$$

die bei der Auswertung des Wirkungsprinzips keine Rolle spielt.

Das Hamilton-Prinzip ist nicht das einzige Variationsprinzip, das in der theoretischen Physik Anwendung findet. Aber es ist dasjenige Prinzip, was für die Entwicklung von Theorien die größte Rolle spielt. Viele Grundgleichungen der Physik lassen sich aus einem Wirkungsprinzip mit einer geeigneten Lagrangefunktion ableiten.