Kapitel 3

Newtonsche Mechanik

Wir haben uns bisher nur um die Beschreibung von Bewegungen gekümmert, ohne uns über deren Ursache Gedanken zu machen. Letzteres ist Aufgabe der **Dynamik**. Wir wollen uns im Folgenden damit beschäftigen, die Ursachen der Bewegung eines Massenpunktes zu berechnen. Die Grundgesetze, denen alle Bewegungen unter Einwirkung von Kräften zugrundeliegen, sind in den **Newtonschen Axiomen** enthalten. Wie der Name andeutet, handelt es sich dabei nicht um ableitbare Sätze, sondern um Verallgemeinerungen einer Vielzahl von Beobachtungen. In diesem Sinne stehen die Newtonschen Axiome als Postulate an der Spitze der Mechanik und können nur falsifiziert werden, wenn die aus ihr folgenden theoretischen Vorhersagen durch Experimente widerlegt werden. Das ist in der Tat schon mit Teilen der ursprünglichen Formulierung der Newtonschen Mechanik geschehen, indem gezeigt werden kann, dass bei sehr großen Geschwindigkeiten eines Massenpunktes (vergleichbar mit der Lichtgeschwindigkeit $c = 3 \times 10^8\,\mathrm{ms}^{-1}$ im Vakuum) einige Aussagen bezüglich der Definitionen von Zeit, Ort, Masse etc. modifiziert werden müssen (relativistische Mechanik). Das Auffinden der kleinsten Menge von notwendigen und hinreichenden, also sich nicht widersprechenden oder aber duplizierenden, Axiomen ist im Allgemeinen eine nichttriviale Aufgabe.

3.1 Die Newtonschen Prinzipien

Bevor wir zu den eigentlichen Axiomen kommen, müssen wir zunächst einige Begriffe einführen. Wir haben bei der Betrachtung der verschiedenen Bewegungszustände festgestellt, dass die geradlinig gleichförmige Bewegung, bei der die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}$ konstant bleibt, eine Ausnahmestellung einnimmt, weil dort der Bewegungszustand des Massenpunktes nicht geändert wird. Dabei stellt sich die Frage, unter welchen Umständen es zu einer solchen Änderung des Bewegungszustandes kommt beziehungsweise unter welchen Umständen eine geradlinig gleichförmige Bewegung existiert. Dies führt zu der Definition des Begriffes der **Kraft**, der sich zunächst auf diejenigen äußeren Einflüsse beziehen soll, die den Bewegungszustand eines Massenpunktes verändern.

3.1.1 Lex prima: Das Trägheitsgesetz

Nun ist die direkte Aussage, dass die Einwirkung einer Kraft die Ursache für eine Bewegung ist, nicht allgemein gültig, da sich beispielsweise ein ruhender Körper, der aus einem fahrenden Zug aus beobachtet wird, scheinbar bewegt. Der Bewegungszustand hängt demnach von der Wahl des Koordinatensystems ab, wie wir später genauer sehen werden. Zunächst definieren wir den Begriff **kräftefreien Körpers** als einen solchen, auf den keine äußeren Einflüsse einwirken. Beispielsweise würde eine Kugel, die auf einer horizontalen Unterlage rollt, durch verschiedene Einwirkungen abgebremst werden. Könnten diese Einflüsse abgeschaltet werden, würde die Kugel in einer geradlinig gleichförmigen Bewegung über die Unterlage rollen. Allerdings gibt es einen vollständig von der Außenwelt isolierten Körper nicht, diese Definition ist also eine idealisierende Annahme. Newton verwendete sie jedoch zur Formulierung seines ersten Axioms:

> Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder geradlinig gleichförmiger Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, diesen Zustand zu ändern.

Die Eigenschaft eines Körpers, ihre Geschwindigkeit in Abwesenheit aller äußeren Einflüsse beizubehalten, wird mit **Trägheit** bezeichnet. Das erste Newtonsche Axiom trägt somit auch den Namen **Trägheitsgesetz**. Die Gültigkeit des Trägheitsgesetzes ist nicht selbstverständlich, da es sich um eine Idealisierung handelt, die keine direkte experimentelle Überprüfung zulässt.

Offensichtlich macht das Trägheitsgesetz auch nur dann Sinn, wenn ein Koordinatensystem angegeben wird, in dem die Bewegung beschrieben wird. Newton gab dazu selbst ein in einem ‘absoluten Raum‘ festgemachtes Koordinatensystem an, das ebenfalls nicht durch ein Experiment festgelegt werden kann. Was das Axiom demnach aussagt, ist, dass es überhaupt ein solches Koordinatensystem gibt, in dem Trägheitsgesetz gilt. Dieses System heisst **Inertialsystem**. Das Trägheitsgesetz muss also in der folgenden Weise eingeschränkt werden:

> In einem **Inertialsystem** verharrt ein kräftefreier Körper in Ruhe oder in geradlinig gleichförmiger Bewegung.

Was ist aber nun ein Inertialsystem? Gehen wir zurück auf den Newtonschen Begriff des absoluten Raumes, so können wir annehmen, dass ein am Fixsternhimmel festgemachtes System mit Ursprung im Zentrum des Sonnensystems und mit Koordinatenachsen in Richtung bestimmter Fixsterne ein solches Inertialsystem sein kann. Es wird sich herausstellen, dass auch alle Koordinatensysteme, die sich geradlinig gleichförmig bezüglich eines Inertialsystems bewegen, ebenfalls Inertialsysteme sind. In den meisten Fällen ist es allerdings ausreichend, ein in der Erde festgemachtes Koordinatensystem als Inertialsystem zu betrachten.

3.1.2 Lex secunda: Das Grundgesetz der Dynamik

Nachdem wir festgestellt haben, unter welchen Umständen ein Massenpunkt in geradlinig gleichförmiger Bewegung verharrt, müssen wir die Frage klären, wie ein Massenpunkt in einem Inertialsystem eine Beschleunigung erfahren kann. Nach dem ersten Newtonschen Axiom muss das durch Einwirkung anderer Körper geschehen. Diese Körper üben Kräfte aus, die an dem betrachteten Massenpunkt angreifen. Allerdings ist die Aussage, dass Kräfte die Ursache der Beschleunigung sind, so nicht ganz richtig. Die Ursache der Beschleunigung liegt vielmehr in den vielfältigen Wechselwirkungen eines Körpers mit seiner Umgebung und in dessen geometrischen und physikalischen (Material-)Eigenschaften. Die Beschreibung der Ursachen sind nicht Gegenstand der Mechanik, sondern anderer Gebiete der Physik (Elektrodynamik, Atomphysik, Elementarteilchenphysik, Gravitationsphysik), in der Mechanik werden nur deren (mechanische) Auswirkungen beschrieben.

Aus unserer Erfahrung wissen wir, dass eine umso größere Kraft benötigt wird, um eine größere Beschleunigung zu erzielen. Demnach muss

$$\mathbf{F} \propto \mathbf{a} \tag{3.1}$$

gelten. Diese Beziehung spiegelt auch die Tatsache wider, dass die Beschleunigung in Richtung der einwirkenden Kraft $\mathbf{F}$ zeigt und die Kraft damit auch eine vektorielle Größe sein muss. Der Proportionalistätsfaktor kann dabei keine Konstante sein, weil wir aus unseren täglichen Erfahrungen wissen, dass wir einen unterschiedlichen Kraftaufwand benötigen, um gleichgroße Metallkugeln oder Holzkugeln zu beschleunigen. Der Proportionalistätsfaktor muss also etwas mit den Materialeigenschaften der Körper zu tun haben. Diese für jeden Körper charakteristische Eigenschaft nennen wir **träge Masse** m_t.

Das zweite Newtonsche Axiom lautet demzufolge:

Die auf einen Massenpunkt wirkende Kraft ist gleich dem Produkt aus dessen träger Masse und der Beschleunigung.

In Formeln ausgedrückt, lautet das zweite Newtonsche Axiom

$$\boxed{\mathbf{F} = m_t\mathbf{a} = m_t\ddot{\mathbf{r}}.} \tag{3.2}$$

Anders ausgedrückt ist die Änderung der Bewegung proportional zur einwirkenden Kraft und geschieht in der Richtung dieser Kraft. Führt man als Bewegungsgröße den **Impuls p** ein, für den

$$\mathbf{p} = m_t\mathbf{v} = m_t\dot{\mathbf{r}} \tag{3.3}$$

gilt, ein, so kann das zweite Newtonsche Axiom in der Form der **Impulsbilanz**

$$\boxed{\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}} \tag{3.4}$$

geschrieben werden.

Die Beziehungen (3.2) und (3.4) sind aber nur dann identisch, wenn die träge Masse m_t zeitlich konstant ist,

$$\mathbf{p} = \frac{d}{dt}(m_t\dot{\mathbf{r}}) = m_t\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}\,. \tag{3.5}$$

Die Konstanz der Masse ist nicht selbstverständlich und muss in jedem individuellen Fall überprüft werden. So nimmt die Masse einer Rakete nach Zündung der Triebwerke stetig ab. Wird die Geschwindigkeit eines Massenpunktes sehr groß und nähert sich der Lichtgeschwindigkeit an, so sagt die spezielle Relativitätstheorie, dass ein Körper mit Ruhemasse m_0 die tatsächliche relativistische Masse

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{3.6}$$

besitzt. In diesen Fällen ist (3.2) nicht mehr richtig, die Relation (3.4) behält aber weiter ihre Gültigkeit.

3.1.3 Lex tertia: Das Wechselwirkungsgesetz

Wir haben gesehen, dass die Kraft als Ursache einer Bewegung eines Körpers angesehen werden kann und haben darunter verstanden, dass diese Kraft aus der Wechselwirkung mit anderen Körpern hervorgeht. Das heisst, dass wir die Rolle zweier Körper als Kraft ausübendes Objekt und beschleunigtes Objekt vertauschen können müssen, ohne dass sich die Gesetzmäßigkeiten des zweiten Newtonschen Axioms ändern. Es gibt also eine Kraftwirkung der Körper untereinander, die im dritten Newtonschen Axiom so formuliert wird:

> Die von einem Massenpunkt 1 auf einen Massenpunkt 2 ausgeübte Kraft $\mathbf{F}_{21}$ ist gleich groß und entgegengesetzt gerichtet zu der Kraft $\mathbf{F}_{12}$, die der Massenpunkt 2 auf den Massenpunkt 1 ausübt.

In Formeln ausgedrückt lautet dieses **Wechselwirkungsgesetz**

$$\boxed{\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}.} \tag{3.7}$$

Dieses Gesetz ist auch unter der lateinischen Bezeichnung *actio=reactio* bekannt.

Dynamische Kraft- und Massenmessung

Das Grundgesetz der Mechanik und das Wechselwirkungsgesetz erlauben es nun, über die Messung der Beschleunigung eine Massenbestimmung durchzuführen. Werden zwei Massenpunkte mit derselben Kraft beschleunigt, so gilt

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{|\ddot{\mathbf{r}}_2|}{|\ddot{\mathbf{r}}_1|}\,. \tag{3.8}$$

Somit ist das Massenverhältnis zweier Körper aus dem Verhältnis der Beträge der erzielten Beschleunigungen bestimmt. Mithilfe einer Vergleichsmasse können also die Massen beliebiger Körper bestimmt werden (siehe Abb. 3.1). Eine solche Vergleichsmasse existiert in Form des Urkilogramms, das aus einem Platin–Iridium–Zylinder der Masse 1 kg besteht und in Paris aufbewahrt wird (siehe Abb. 3.2). Mit der Grundeinheit der Masse, des Kilogramms, ergibt sich die physikalische Einheit der Kraft zu

$$[\mathbf{F}] = [m_t][\mathbf{a}] = 1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg\ m\ s^{-2}}\,. \tag{3.9}$$

Die Einheit der Masse, speziell der trägen Masse, ist eine der sieben Basiseinheiten des SI-Systems, aus denen sich alle anderen physikalischen Größen wie die Kraft ableiten lassen.

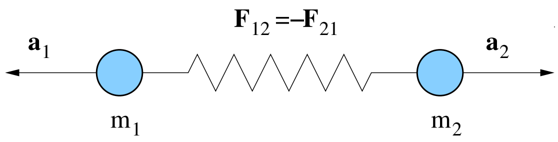

Abbildung 3.1: Gedankenexperiment zur Bestimmung der trägen Masse über eine Vergleichsmessung mit einer bekannten Masse. Beide Massen sind über eine gespannte Feder miteinander verbunden, die zu einem bestimmten Zeitpunkt durchtrennt wird.

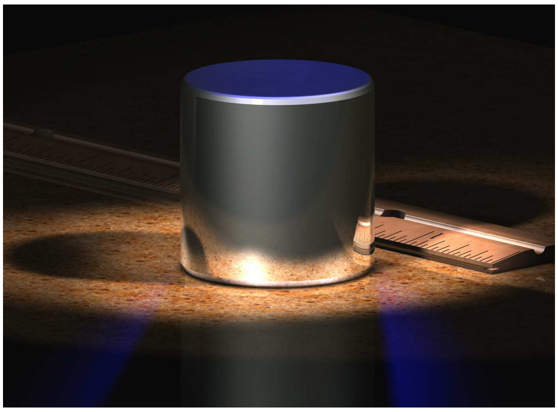

Abbildung 3.2: Das Urkilogramm in Paris besteht aus einem Platin–Iridium–Zylinder der Masse 1 kg und dient als Vergleichsmasse oder Standard für alle Massenbestimmungen. Bildnachweis: Wikipedia.

Statische Kraft- und Massenmessung

Im Gegensatz zur trägen Masse, die als Proportionalistätsfaktor im zweiten Newtonschen Axiom eingeführt wurde, gibt es andere Definition der Masse, die über die Gravitation motiviert ist. Jeder Körper erfährt eine zum Erdmittelpunkt gerichtete Gravitations- oder Schwerkraft. An einem festen Ort ist die Fallbeschleunigung dieselbe, also gilt für jeden Körper $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g}$. Der Betrag dieser Fallbeschleunigung ist im Mittel $g = 9.81$ ms^{-2}, ändert sich aber leicht von Ort zu Ort. Als Vektorgröße in einem kartesischen Koordinatensystem gilt somit $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$. Aus dem Grundgesetz (3.2) folgt demnach

$$\boxed{\mathbf{F}_s = m_s \mathbf{g}.} \tag{3.10}$$

Diese **schwere Masse** m_s wird beispielsweise durch eine statische Messung über die Auslenkung einer Feder gewonnen oder durch die Balance einer Waage mit einer Vergleichsmasse. Zwei Körper haben also dann die gleiche Masse, wenn bei einer statischen Gewichtsmessung festgestellt wird, dass deren Gewichte an einem bestimmten Ort gleich sind,

$$m_1 g = m_2 g \quad \rightsquigarrow \quad m_1 = m_2 \,. \tag{3.11}$$

In diesem Fall befinden sich die Körper aber in Ruhe, der Massenvergleich hat also erstmal nichts mit der trägen Masse zu tun.

Allerdings kann experimentell überprüft werden, dass die Bestimmung der trägen Masse über eine dynamische Massenmessung und die der schweren Masse über eine statische Messung dasselbe Ergebnis liefert. Das heisst, dass die Fallbeschleunigung auf jeden Körper gleich wirkt. Dies ist die Kernaussage des **Einsteinschen Äquivalenzprinzips**, das die Grundlage für die allgemeine Relativitätstheorie bildet. Wir können also sagen, dass für alle Körper die Beziehung

$$m_t = m_s = m \tag{3.12}$$

gilt.

3.1.4 Superpositionsprinzip

Wirken mehrere Kräfte auf einen Körper, so ist deren Gesamtwirkung durch die vektorielle Addition der einzelnen Kräfte gegeben, das heisst, die Gesamtkraft ist

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \tag{3.13}$$

und das Grundgesetz der Dynamik lautet

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \,. \tag{3.14}$$

Man beachte, dass man diese Beziehung nicht direkt aus dem Grundgesetz ableiten kann, bei dem man annehmen könnte, dass $m\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i$ gilt. Das würde aber bedeuten, dass die Kräfte nicht unabhängig voneinander auf den Körper wirken.

3.1.5 Bewegte Bezugssysteme

Das Grundgesetz der Dynamik, also das zweite Newtonsche Axiom, nimmt in einem Inertialsystem die Form

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{3.15}$$

an, wobei wir annehmen, dass die Masse konstant bleibt. Wir wollen nun bestimmen, wie sich die Form dieses Gesetzes beim Übergang in ein zu diesem Inertialsystem bewegtes Bezugssystem ändert. Hier soll zum einen die Rolle des Inertialsystems klar werden, zum anderen ist es oft von praktischer Bedeutung, die Bewegung eines Massenpunktes in einem bewegten Bezugssystem zu beschreiben.

Ein Inertialsystem wurde definiert als ein solches Bezugssystem, in dem ein kräftefreier Massenpunkt eine geradlinig gleichförmige Bewegung vollführt, also $\dot{\mathbf{r}} = \text{const.}$ gilt. Offensichtlich gibt es nicht nur ein einziges Inertialsystem. Sei Σ ein Inertialsystem, dann ist jedes andere Bezugssystem Σ' ebenfalls ein Inertialsystem, wenn

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \quad \rightsquigarrow \quad m\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{0} \tag{3.16}$$

gilt, wobei wir noch voraussetzen, dass $\Sigma = \Sigma'$ für $t = 0$ gilt.

Wir betrachten nun zwei Bezugssysteme Σ und Σ', die sich gegeneinander bewegen sollen (siehe Abb. 3.3). Das Bezugssystem Σ sei dabei ein

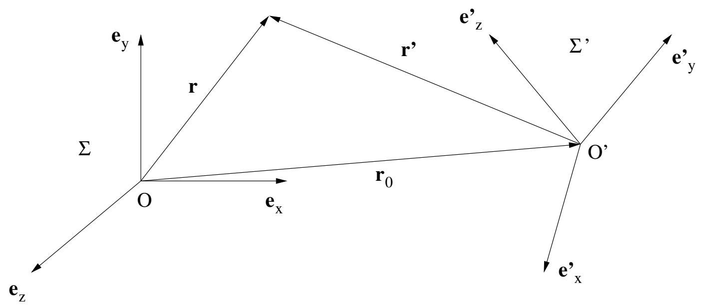

Abbildung 3.3: Zwei Bezugssysteme Σ und Σ' in relativer Bewegung zueinander.

Inertialsystem. Die Bewegung eines Massenpunktes wird in beiden Koordinatensystemen unterschiedlich beschrieben,

$$\text{in}\,\Sigma: \; \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad \text{in}\,\Sigma': \; \mathbf{r}' = \mathbf{r}'(t)\,. \tag{3.17}$$

Beide Ortsvektoren sind durch

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_0 \tag{3.18}$$

miteinander verknüpft, wobei $\mathbf{r}_0(t)$ den Verbindungsvektor der beiden Koordinatenursprünge bezeichnet.

Die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen in den jeweiligen Bezugssystemen erhalten wir durch zeitliche Differentiation. Die Geschwindigkeit des Massenpunktes für einen Beobachter im bewegten Bezugssystem Σ' lautet dann

$$\dot{\mathbf{r}}' \equiv \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} = \dot{x}'\mathbf{e}'_x + \dot{y}'\mathbf{e}'_y + \dot{z}'\mathbf{e}'_z\,, \tag{3.19}$$

wobei die Bezeichnung $d'\mathbf{r}'/dt$ zum Ausdruck bringen soll, dass die Differentiation in Σ' bei festgehaltenen Koordinatenachsen stattfinden soll.

Für einen Beobachter im Inertialsystem Σ hat der Massenpunkt die Geschwindigkeit

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + x'\dot{\mathbf{e}}'_x + y'\dot{\mathbf{e}}'_y + z'\dot{\mathbf{e}}'_z + \dot{x}'\mathbf{e}'_x + \dot{y}'\mathbf{e}'_y + \dot{z}'\mathbf{e}'_z \\
&= \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + x'\dot{\mathbf{e}}'_x + y'\dot{\mathbf{e}}'_y + z'\dot{\mathbf{e}}'_z\,.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Hierbei sind die Einheitsvektoren $\mathbf{e}'_i$ im allgemeinen nicht konstant. Eine zeitliche Änderung der Einheitsvektoren wird durch Drehungen von Σ' um eine Achse durch den Koordinatenursprung O' hervorgerufen. Die Drehung eines Vektors $\mathbf{r}$ um eine Achse ist in Abb. 3.4 dargestellt. Die Länge des Vektorstückes $|d\mathbf{r}|$ berechnet sich nach der Abbildung 3.4 zu

$$|d\mathbf{r}| = |\mathbf{r}| \sin\Theta \, d\varphi\,. \tag{3.21}$$

Wir definieren nun den Vektor der **Winkelgeschwindigkeit** $\boldsymbol{\omega}$ als einen Vektor, dessen Richtung durch die Drehachse im Sinne einer Rechtsschraube und dessen Betrag durch $d\varphi/dt$ gegeben ist. Damit ergibt sich

$$\boxed{\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}}\,. \tag{3.22}$$

Speziell für die Einheitsvektoren $\mathbf{e}'_x$, $\mathbf{e}'_y$ und $\mathbf{e}'_z$ folgt damit

$$\frac{d\mathbf{e}'_x}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_x \quad \text{usw.} \tag{3.23}$$

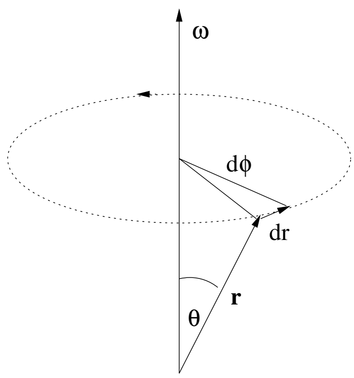

Abbildung 3.4: Drehung eines Vektors um eine Achse.

und damit

$$x'\dot{\mathbf{e}}'_x + y'\dot{\mathbf{e}}'_y + z'\dot{\mathbf{e}}'_z = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \,. \tag{3.24}$$

Fasst man die Ergebnisse zusammen, so folgt für die Geschwindigkeit des Massenpunktes für einen Beobachter im Inertialsystem Σ

$$\boxed{\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'} \,. \tag{3.25}$$

Die in dieser Gleichung auftretenden Geschwindigkeiten tragen die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} &: \quad \textbf{Absolutgeschwindigkeit}\,, \\ \mathbf{v}' = \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} &: \quad \textbf{Relativgeschwindigkeit}\,, \\ \mathbf{v}_0 = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} &: \quad \textbf{Translationsgeschwindigkeit}\,. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Für verschwindende Relativgeschwindigkeit wird die verbleibende rechte Seite von Gl. (3.25),

$$\frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \,, \tag{3.27}$$

als **Führungsgeschwindigkeit** bezeichnet. Wegen $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ folgt aus Gl. (3.25) zudem, dass

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \,, \tag{3.28}$$

was offensichtlich für jeden beliebigen Vektor gilt. Speziell für den Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ erhalten wir

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d'\boldsymbol{\omega}}{dt}\,, \tag{3.29}$$

das heisst, dessen zeitliche Ableitung ist in jedem Koordinatensystem dieselbe.

Differenziert man Gl. (3.25) noch einmal nach der Zeit, so erhält man die Beschleunigung zu

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}'\,, \tag{3.30}$$

wobei die Ableitung der Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v}'$ im Inertialsystem nach Gl. (3.28) zu

$$\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \frac{d'\mathbf{v}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \tag{3.31}$$

wird. Ebenso folgt, dass

$$\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')\,. \tag{3.32}$$

Fasst man alles zusammen, so folgt für die Beschleunigung

$$\boxed{\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \frac{d'\mathbf{v}'}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'}\,. \tag{3.33}$$

Die einzelnen Terme haben die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} &: \quad \textbf{Translationsbeschleunigung}\,, \\ -2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' &: \quad \textbf{Coriolisbeschleunigung}\,, \\ -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') &: \quad \textbf{Zentrifugalbeschleunigung}\,. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Aus dem Grundgesetz $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ in Σ folgt damit die Darstellung der Beschleunigung im bewegten Bezugssystem Σ' als

$$\boxed{m\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{r}}_0 - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'}\,. \tag{3.35}$$

Zusätzlich zu den eingeprägten Kräften $\mathbf{F}$ treten also Kräfte auf, die **Scheinkräfte** oder **Trägheitskräfte**, die im Inertialsystem nicht existieren und die nur von der relativen Bewegung der Bezugssysteme abhängen. Im bewegen Bezugssystem Σ' gilt also die Grundgleichung $m\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F}$ im allgemeinen nicht in dieser Form. Die Grundgleichung der Mechanik kann aber natürlich immer dann angewandt werden, wenn zur Kraft im Inertialsystem die Trägheitskräfte dazuaddiert werden.

Das Galileische Relativitätsprinzip

Sei Σ wieder ein Inertialsystem und Σ' ein bezüglich Σ bewegtes Bezugssystem, das sich aber nur mit konstanter Geschwindigkeit bewegen und nicht rotieren soll. Das heisst,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}' \quad \text{mit} \quad \dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{0}\,, \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}\,, \tag{3.36}$$

und die Grundgleichungen lauten in beiden Bezugssystemen

$$\text{in}\,\Sigma : m\ddot{\mathbf{r}} \;=\; \mathbf{F}\,, \tag{3.37}$$

$$\text{in}\,\Sigma' : m\ddot{\mathbf{r}}' \;=\; \mathbf{F}\,. \tag{3.38}$$

Das heisst, es treten keinerlei Trägheitskräfte auf. Die eingeprägten Kräfte sind gewöhnlich Wechselwirkungen mit anderen Körpern und hängen demnach nur von den relativen Positionen und Geschwindigkeiten dieser Körper ab, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{\text{ref}}, \dot{\mathbf{r}}-\dot{\mathbf{r}}_{\text{ref}}, t)$. Durch die **Galileitransformation** (3.36) nimmt die Grundgleichung in Σ' aber die gleiche Form wie in Σ an. Das heisst zum einen, dass niemals ein System Σ absoluter Ruhe angegeben werden kann, da dies genauso von einem System Σ', dass sich bezüglich Σ in geradlinig gleichförmiger Bewegung befindet, behauptet werden kann. Zum anderen bedeutet das, dass es mehr als nur ein Inertialsystem gibt; sobald man ein Inertialsystem gefunden hat, können durch geradlinig gleichförmige Translationen beliebige andere Inertialsysteme konstruiert werden. Durch mechanische Experimente kann also kein Unterschied zwischen Σ und Σ' festgestellt werden. Das ist die Aussage des **Galileischen Relativitätsprinzips**. Anders ausgedrückt ist die Grundgleichung der Mechanik bei der Galileitransformation von einem Inertialsystem in ein anderes forminvariant.

Seien zum Beispiel die beiden Bezugssysteme Σ und Σ' zum Zeitpunkt $t = 0$ identisch und bewegen sich danach mit konstanter Geschwindigkeit v_0 in x-Richtung voneinander weg. Dann lautet die Galileitransformation

$$x' = x - v_0 t\,, \quad y' = y\,, \quad z' = z\,, \quad t' = t\,. \tag{3.39}$$

Hier haben wir zusätzlich angegeben, dass die Zeit in beiden Bezugssystemen die gleiche ist, also nicht mittransformiert wird. Das ist keine triviale Aussage und ist auch nur dann richtig, wenn die Translationsgeschwindigkeit viel kleiner ist als die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Die Galileitransformation ist dann nur als Grenzfall der allgemeineren **Lorentztransformation**

$$x' = \frac{x - v_0 t}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}\,, \quad t' = \frac{t - v_0 x/c^2}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \tag{3.40}$$

anzusehen. Die Forminvarianz der Grundgleichung der Mechanik bezüglich der Lorentztransformation und damit die Äquivalenz aller Bezugssysteme, die nur unbeschleunigte Translationsbewegungen ausführen, ist die Kernaussage des **Einsteinschen speziellen Relativitätsprinzips**.

3.2 Dynamik eines Massenpunktes

Die Aufgabe der Dynamik besteht typischerweise darin, den Bewegungsablauf eines im Raum frei beweglichen Massenpunktes unter dem Einfluß einer Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ zu bestimmen. Das Grundgesetz der Mechanik

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \tag{3.41}$$

liefert die Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ durch Lösen dreier gekoppelter Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die nur durch die Angabe von sechs Anfangsbedingungen oder Randbedingungen gelöst werden können. Typisch werden dafür der Ort $\mathbf{r}_0$ und die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_0$ des Massenpunktes zum Zeitpunkt t_0 vorgegeben,

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)\,, \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t_0)\,. \tag{3.42}$$

Durch Lösung der Bewegungsgleichung ist also der vollständige Bewegungsablauf für alle spätere Zeiten bestimmt. Das ist ein Ausdruck der **Kausalität**, das heisst, aus gegebenen Anfangsbedingungen sind alle späteren Positionen und Geschwindigkeiten eines Massenpunktes eindeutig fixiert.

Die Integration der Bewegungsgleichung kann bei gewissen Arten von Kräften durch **Bilanzgleichungen** und **Erhaltungssätze** vereinfacht und **Integrale der Bewegung** angegeben werden. Diese Integrale der Bewegung sind typischerweise Differentialgleichungen erster Ordnung (im Gegensatz zu den Bewegungsgleichungen selbst, die ja Differentialgleichungen zweiter Ordnung sind). Die Integrale der Bewegung können immer auf die Form

$$f(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = 0 \tag{3.43}$$

gebracht werden. Deren Analyse vereinfacht meist die Lösung und die physikalische Interpretation der Bewegung.

3.2.1 Impulsbilanz

Die Impulsbilanzgleichung für einen Massenpunkt ist nichts anderes als die Form des Grundgesetzes der Mechanik

$$\boxed{\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}} \tag{3.44}$$

mit

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}} \tag{3.45}$$

dem Impuls des Massenpunktes. In Worten kann die Impulsbilanz so formuliert werden, dass die zeitliche Änderung des Impulses gleich der einwirkenden Gesamtkraft ist. Wenn keine Kräfte auf den Massenpunkt wirken, also $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ gilt, so folgt der **Impulserhaltungssatz**

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{0} \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{p} = \text{const.} \tag{3.46}$$

was offensichtlich ein Integral der Bewegung der Form (3.43) ist. Es drückt aus, dass bei Abwesenheit von Kräften die Bewegung geradlinig gleichförmig verläuft, also dass sich ein kräftefreier Massenpunkt auf einer Geraden mit konstanter Geschwindigkeit bewegt oder ruht.

3.2.2 Energiebilanz

Zunächst definieren wir den Begriff der **Arbeit**. Eine Kraft $\mathbf{F}$, die an einem Massenpunkt angreift, verrichtet bei der Verschiebung des Massenpunktes entlang einer Kurve $\mathcal{C}$ eine Arbeit W. Für eine infinitesimal kleine Verschiebung ist die geleistete Arbeit

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}\,. \tag{3.47}$$

Der Betrag der geleisteten Arbeit hängt demnach auch von dem Winkel ab, den die Vektoren der einwirkenden Kraft und des Tangenteneinheitsvektors der Bahnkurve bilden. Die infinitesimale Arbeit dW kann somit sowohl positiv als auch negativ sein, im letzteren Fall bedeutet das, dass Arbeit gegen die

Kraft geleistet werden muss, um die Verschiebung des Massenpunktes zu realisieren. Die gesamte Arbeit, die während der Bewegung des Massenpunktes entlang des Pfades $\mathcal{C}$ geleistet wird, ist also durch das Linienintegral

$$W = \int_{\mathcal{C}} dW = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{3.48}$$

gegeben.

Die geleistete Arbeit hängt im allgemeinen von der durchlaufenen Wegstrecke, von Anfangs- und Endpunkt und von der einwirkenden Kraft ab. Wir definieren nun die **Leistung** P, die eine Kraft an einem Massenpunkt leistet, als die pro Zeiteinheit verrichtete Arbeit,

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} \,. \tag{3.49}$$

Multipliziert man die Bewegungsgleichung $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ skalar mit der Geschwindigkeit, so erhält man

$$m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} \,. \tag{3.50}$$

Die linke Seite dieser Gleichung können wir wie folgt umformen:

$$m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}\right) \,. \tag{3.51}$$

Die Größe

$$T = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{m}{2}|\dot{\mathbf{r}}|^2 \tag{3.52}$$

wird als **kinetische Energie** bezeichnet. Gleichung (3.50) ist demnach die Bilanzgleichung für die kinetische Energie

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = P} \,, \tag{3.53}$$

das heisst, die zeitliche Änderung der kinetischen Energie eines Massenpunktes ist gleich der Leistung der einwirkenden Gesamtkraft.

Die Energiebilanzgleichung (3.53) kann man als Integralgleichung umschreiben, indem entlang einer Bahnkurve von einem Punkt P_1 zu einem Punkt P_2 integriert wird,

$$\int_{P_1}^{P_2} dT = \int_{P_1}^{P_2} P \, dt = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \,. \tag{3.54}$$

Anders ausgedrückt, heisst das, dass die Differenz der kinetischen Energie eines Massenpunktes zwischen den Orten P_1 und P_2 gerade die geleistete Arbeit ist,

$$T(P_2) - T(P_1) = W\,. \tag{3.55}$$

Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass in der Energiebilanzgleichung alle auf den Körper wirkenden Kräfte zu berücksichtigen sind, da die Grundgleichung der Mechanik die Gesamtkraft enthält.

Konservative Kräfte

Als konservative Kräfte bezeichnet man zeitunabhängige Kräfte, die sich als Gradient einer skalaren Funktion $U(\mathbf{r})$ darstellen lassen,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla} U(\mathbf{r})\,, \tag{3.56}$$

die man **potentielle Energie** oder schlicht **Potential** nennt. Für ein konservatives Kraftfeld folgt für die Leistung

$$P = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\boldsymbol{\nabla} U(\mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = -\frac{dU}{dt} \tag{3.57}$$

Das heisst, in einem konservativen Kraftfeld ist die Leistung gerade die negative zeitliche Ableitung der potentiellen Energie. Damit wird die Energiebilanzgleichung (3.53) zu

$$\frac{dT}{dt} = P = -\frac{dU}{dt} \tag{3.58}$$

oder

$$\boxed{\frac{d}{dt}(T + U) = 0}\,. \tag{3.59}$$

Gleichung (3.59) ist die Bilanzgleichung für die mechanische Gesamtenergie, aus der der **Energieerhaltungssatz**

$$T + U = \frac{m}{2}|\dot{\mathbf{r}}|^2 + U(\mathbf{r}) = E = \text{const.} \tag{3.60}$$

folgt, der ausdrückt, dass bei der Bewegung eines Massenpunktes in einem konservativen Kraftfeld die Gesamtenergie, bestehend aus der kinetischen und der potentiellen Energie, zeitlich konstant ist.

Wir haben schon in der Vorlesung Mathematische Methoden festgestellt, unter welchen Umständen eine Kraft konservativ ist. Wir wissen, dass die Anwendung der Rotation auf ein Gradientenfeld immer Null ergibt,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{0} \tag{3.61}$$

unabhängig davon, wie das skalare Feld $f(\mathbf{r})$ beschaffen ist. Das heisst nichts anderes als dass die Wirbelstärke eines Gradientenfeldes verschwindet. Dieses Ergebnis verwenden wir nun zum Test, ob ein gegebenes Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ konservativ ist oder nicht. Offensichtlich gilt für ein konservatives Kraftfeld

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} U(\mathbf{r}) = \mathbf{0}\,. \tag{3.62}$$

Die Umkehrung dieses Arguments ist auch richtig, dass jedes wirbelfreie Vektorfeld als Gradient eines Skalarfeldes ausgedrückt werden kann.

Weiterhin stellt man fest, dass das Wegintegral über eine konservative Kraft entlang einer Bahnkurve nur von Anfangs- und Endpunkt abhängt,

$$\int\limits_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int\limits_{P_1}^{P_2} \boldsymbol{\nabla} U(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -\int\limits_{P_1}^{P_2} dU = U(P_1) - U(P_2)\,, \tag{3.63}$$

aber nicht vom gewählten Weg. Speziell gilt, dass das Linienintegral über einen geschlossenen Weg $\mathcal{C}$ über eine konservative Kraft verschwindet,

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0\,. \tag{3.64}$$

Wenn also eine konservative Kraft gegeben ist, kann man aus ihr ein Potential über ein Linienintegral konstruieren. Dieses Potential ist zunächst nicht eindeutig, da es vom Anfangspunkt der Integration abhängt. Um das Potential an einem speziellen Punkt P zu berechnen, haben wir das Linienintegral

$$U(P) = U(P_0) - \int\limits_{P_0}^{P} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{3.65}$$

auszuwerten, das noch vom gewählten Anfangspunkt P_0 abhängt. Gewöhnlich wird das Potential so gewählt, dass es an einem unendlich fernen Punkt verschwindet. Das Potential ist dann genau die Arbeit, die gegen die Kraft $\mathbf{F}$

verrichtet werden muss, um den Massenpunkt vom Ort P_0 zum Punkt P zu verschieben.

Die Flächen gleichen Potentials, $U = \text{const.}$, sind die sogenannten **Äquipotentialflächen**. Entlang dieser Flächen gilt offensichtlich auch $dU = 0 = \boldsymbol{\nabla} U \cdot d\mathbf{r}$ und damit, dass $d\mathbf{r} \perp \boldsymbol{\nabla} U$. Das heisst, wenn $d\mathbf{r}$ in der Äquipotentialfläche liegt, steht der Gradient des Potentials, also die Kraft, senkrecht dazu auf den Äquipotentialflächen. Die Kraft zeigt somit in Richtung des stärksten Gefälles des Potentials.

Ist die Kraft senkrecht zur Geschwindigkeit, so verschwindet nach (3.50) die Leistung, $P = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$. Damit verschwindet auch das Potential U, weil aus der Energiebilanzgleichung sofort folgt, dass

$$\frac{dT}{dt} = P = 0 \quad \rightsquigarrow \quad T = \text{const.} \tag{3.66}$$

Damit kann die Kraft auch nicht als Gradient eines Potentials geschrieben werden. Ein typisches Beispiel für eine solche Kraft ist die Lorentzkraft auf eine elektrische Ladung q in einem Magnetfeld $\mathbf{B}$,

$$\mathbf{F} = q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}\,. \tag{3.67}$$

Nichtkonservative Kräfte

Eine Kraft ist genau dann konservativ, wenn sie nur vom Ort des Massenpunktes abhängt und zudem wirbelfrei ist. Beide Bedingungen können getrennt voneinander nicht erfüllt sein. Sei beispielsweise die Kraft explizit von der Zeit abhängig, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$, und sei die Kraft zu jedem Zeitpunkt wirbelfrei,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}\,. \tag{3.68}$$

Dann kann man ein explizit zeitabhängiges Potential

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = -\boldsymbol{\nabla} U(\mathbf{r}, t) \tag{3.69}$$

einführen, so dass die Bedingung (3.68) erfüllt ist. Trotzdem ist ein solches Kraftfeld nicht konservativ. Setzt man Gl. (3.69) in die Bilanzgleichung für die kinetische Energie ein, so erhält man

$$\frac{dT}{dt} = P = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\boldsymbol{\nabla} U \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}\,. \tag{3.70}$$

Wir erweiteren die rechte Seite um den Term $\partial U/\partial t$ und finden mit

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{dU}{dt} \tag{3.71}$$

die Energiebilanz

$$\boxed{\frac{d}{dt}(T+U) = \frac{\partial U}{\partial t}}\,. \tag{3.72}$$

Die zeitliche Änderung der mechanischen Gesamtenergie eines Massenpunktes ist also gleich der partiellen zeitlichen Ableitung der potentiellen Energie. Durch explizit zeitveränderliche, also **nichtstationäre**, Potentiale kann also dem Massenpunkt Energie zugeführt werden. Alle Kräfte, die sich aus einem Potential ableiten lassen, nennt man **Potentialkräfte**, unabhängig davon, ob sie konservativ sind order nicht.

Alle Kräfte, die die mechanische Gesamtenergie nicht erhalten, die also nicht konservativ sind, werden unter dem Begriff **dissipative Kräfte** zusammengefasst. Beispiele für dissipative Kräfte sind Kräfte, die nicht wirbelfrei sind oder solche, die von der Geschwindigkeit oder explizit von der Zeit abhängen. Da die mechanische Gesamtenergie $E = T + U$ bei Wirkung dieser Kräfte nicht erhalten ist, muss es also noch andere Energieformen geben, die in der mechanischen Betrachtung nicht enthalten sind, die aber in einer allgemeineren Energiebilanz berücksichtigt werden müssen. Ein typisches Beispiel für eine solche nicht-mechanische Energieform ist Wärme, die beispielsweise bei Reibungsprozessen entsteht.

Jede Kraft kann in einen konservativen und einen dissipativen Anteil aufgeteilt werden,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{con}}(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_{\text{diss}}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t)\,, \quad \mathbf{F}_{\text{con}}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla} U(\mathbf{r})\,, \tag{3.73}$$

so dass die Energiebilanz die Form

$$\frac{d}{dt}(T+U) = P_{\text{diss}} = \mathbf{F}_{\text{diss}}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t)\cdot\dot{\mathbf{r}} \tag{3.74}$$

annimmt. Das heisst, die zeitliche Änderung der mechanischen Gesamtenergie ist gleich der dissipierten Leistung.

Beispiel für dissipative Kräfte: Reibung

Ein typisches Beispiel für eine geschwindigkeitsabhängige Kraft ist die Reibungskraft, die auf einen Körper wirkt, der sich durch ein Gas oder eine

Flüssigkeit bewegt. Bei kleinen Geschwindigkeiten (laminare Strömung) ist die Reibungskraft linear proportional zur Geschwindigkeit,

$$\mathbf{F}_{\text{diss}}(\dot{\mathbf{r}}) = -\gamma \dot{\mathbf{r}} \,, \tag{3.75}$$

mit einem positiven Reibungskoeffizienten γ. Für die mechanische Gesamtenergie ergibt sich damit die Bilanzgleichung

$$\frac{d}{dt}(T + U) = -\gamma |\dot{\mathbf{r}}|^2 \,, \tag{3.76}$$

die mechanische Energie nimmt also mit der Zeit ständig ab. Die Energie wird dabei von der Umgebung, z.B. den Gasmolekülen, aufgenommen.

Für einige physikalische Systeme wie beispielsweise einen Federschwinger oder ein Fadenpendel können rücktreibende Kräfte angegeben werden, die unter gewissen Voraussetzungen linear proportional zu einer Ortsvariablen sind. Für kleine Auslenkungen einer Feder gilt das Hookesche Gesetz, nach dem die rücktreibende Kraft gerade $\mathbf{F}_{\text{feder}} = -kx\mathbf{e}_x$ ist. Diese Kraft ist konservativ, da sie aus einem Potential $U_{\text{feder}} = kx^2/2$ folgt. Die mechanische Gesamtenergie des Federschwingers ist demnach

$$E = T + U = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 = \text{const.} \tag{3.77}$$

Im Falle von Reibung, bei der sich die Feder selbst erwärmt, kommt noch die Reibungskraft (3.75) hinzu, so dass die Energiebilanz

$$\frac{dE}{dt} = -\gamma \dot{x}^2 \tag{3.78}$$

wird. Die dazugehörige Bewegungsgleichung ist die eines gedämpften harmonischen Oszillators,

$$m\ddot{x} = -\gamma \dot{x} - kx \,, \tag{3.79}$$

dessen Lösungen wir schon in der Vorlesung 'Mathematische Methoden' kennengelernt haben.

Zentralkräfte

Als Zentralkräfte bezeichnet man Kräfte, die nur vom Abstand $r = |\mathbf{r}|$ vom Koordinatenursprung abhängen und nur eine radiale Komponente besitzen, die in Kugelkoordinaten also die spezielle Form

$$\mathbf{F}_{\text{z}} = f(r)\mathbf{e}_r \tag{3.80}$$

haben. Kräfte dieser Art sind konservativ, da sie aus einem Potential

$$U(r) = -\int_{r_0}^{r} dr'\, f(r') \tag{3.81}$$

folgen. Wichtige Beispiele für Potentiale, die zu Zentralkraftfeldern gehören, sind das Newtonsche Gravitationspotential im Feld einer Masse M

$$U_{\rm gr} = -G\frac{mM}{r}\,, \quad G : \text{Gravitationskonstante} \tag{3.82}$$

und das Coulombpotential der Elektrodynamik einer Ladung q,

$$U_{\rm C} = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r}\,, \quad \varepsilon_0 : \text{Permittivität des Vakuums}\,. \tag{3.83}$$

3.2.3 Drehimpulsbilanz

Als dritte Bilanz betrachten wir den **Drehimpuls**, der als das Vektorprodukt

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \tag{3.84}$$

definiert ist. Dessen Bilanzgleichung finden wir durch vektorielle Multiplikation des Grundgesetzes (3.2) mit dem Ortsvektor,

$$m\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}\,, \tag{3.85}$$

wobei $\mathbf{M} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$ das **Drehmoment** bezeichnet. Differenzieren wir Gl. (3.85) nach der Zeit, so folgt wegen

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} \tag{3.86}$$

die Drehimpulsbilanzgleichung

$$\boxed{\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}}\,, \tag{3.87}$$

die zeitliche Änderung des Drehimpulses ist also gerade gleich dem wirkenden Drehmoment. Ist das Gesamtdrehmoment Null, $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, so folgt der **Drehimpulserhaltungssatz**

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{L} = \text{const.} \tag{3.88}$$

Dieser Erhaltungssatz liefert ein vektorielles Bewegungsintegral der From $m\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \text{const.}$, das über zwei verschiedenartige Bedingungen realisiert werden kann. Das Drehmoment verschwindet trivial, $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, wenn keine Kraft auf den Massenpunkt wirkt, $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Das Drehmoment kann aber auch verschwinden, wenn die eingeprägte Kraft immer parallel (oder antiparallel) zum Ortsvektor wirkt. Das ist aber gerade bei den schon betrachteten Zentralkräften der Fall. In einem Zentralkraftfeld gilt also immer die Drehimpulserhaltung.

Betrachten wir nun die Bewegung eines Massenpunktes entlang einer Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$. Nach einem Zeitintervall dt hat sich der Ortsvektor um ein Stück $d\mathbf{r}$ weiterbewegt (siehe Abb. 3.5). Das vektorielle Flächenelement, das

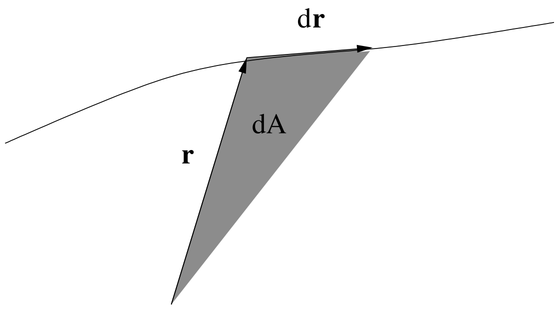

Abbildung 3.5: Schematische Darstellung des Flächensatzes.

von den Vektoren $\mathbf{r}$ und $d\mathbf{r}$ aufgespannt wird, berechnet sich über das Vektorprodukt zu

$$d\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times d\mathbf{r}\,. \tag{3.89}$$

Dessen zeitliche Änderung, die **Flächengeschwindigkeit**, ist aber gerade

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2m}\mathbf{L}\,, \tag{3.90}$$

also proportional zum Drehimpuls. In einem Zentralkraftfeld ist letzterer erhalten, und es folgt der **Flächensatz**: Unter dem Einfluss einer Zentralkraft bewegt sich ein Massenpunkt in einer Ebene senkrecht zum Drehimpuls, und der Ortsvektor (oder Fahrstrahl) überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen. Diese Aussage ist auch Teil der **Keplerschen Gesetze**, die lange vor Newton speziell für die Bewegung der Planeten um die Sonne, also im Gravitationsfeld der Sonne, empirisch aufgestellt wurden.

Sei nun die Ebene, in der sich der Massenpunkt bewegt, gerade die (x, y)-Ebene. Dann ist der Drehimpuls in kartesischen Koordinaten gegeben durch

$$\mathbf{L} = m(x\dot{y} - \dot{x}y)\mathbf{e}_z \,, \tag{3.91}$$

in Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z) hingegen nimmt der Drehimpuls die Form

$$\mathbf{L} = m\varrho^2\dot{\varphi}\mathbf{e}_z \tag{3.92}$$

an. In einem Zentralkraftfeld gilt also $\varrho^2\dot{\varphi} = \text{const.}$, was ein Integral der Bewegung darstellt.

3.2.4 Erhaltungssätze und Integrale der Bewegung

Erhaltungssätze sind Einschränkungen, die der Bewegung eines Massenpunktes durch die Natur der wirkenden Kräfte aufgeprägt wird. Dabei helfen sie, die Bewegungsgleichungen aufzuintegrieren. Interessant sind allerdings nur die nichttrivialen Energie- und Drehimpulserhaltungssätze, da für einen einzigen Massenpunkt die Impulserhaltung per Definition nur zu einer geradlinig gleichförmigen Bewegung führen kann.

Wir betrachten zunächst eine eindimensionale Bewegung entlang der x-Achse, das heisst, Ortsvektor, Geschwindigkeit und Beschleunigung haben nur eine x-Komponente. Offensichtlich verschwindet für eine solche Bewegung der Drehimpuls. Wir wollen nun zusätzlich annehmen, dass die Kraft $\mathbf{F} = F(x)\mathbf{e}_x$ konservativ ist, so dass der Energieerhaltungssatz gilt,

$$\frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x) = E = \text{const.} \tag{3.93}$$

mit dem Potential

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} dx' F(x') \,, \quad U(x_0) = 0 \,. \tag{3.94}$$

Aus der Energieerhaltung (3.93) folgt für die Geschwindigkeit

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m}\left[E - U(x)\right] \quad \rightsquigarrow \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]} \,. \tag{3.95}$$

Diese Differentialgleichung kann wieder mit Separation der Variablen gelöst werden mit dem Ergebnis, dass

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{2[E - U(x)]/m}} + \text{const.}\,, \tag{3.96}$$

wobei die Integrationskonstante über die Wahl der Anfangsbedingungen bestimmt ist. Da Gl. (3.93) nur eine Differentialgleichung erster Ordnung darstellt, gibt es nur eine Integrationskonstante. Die zweite Konstante, die man bei der Lösung der Grundgleichung der Mechanik erwartet, ist gerade die Gesamtenergie E. Die Gleichung (3.96) hat als Lösung eine Funktion $t(x)$, deren Umkehrfunktion $x(t)$ die gesuchte Bahnkurve darstellt. Allerdings ist es nicht immer einfacher, die Bewegungsgleichungen über solche Erhaltungssätze zu lösen als durch direkte Integration.

Da $\dot{x}^2 \geq 0$ gilt, folgt aus Gl. (3.95), dass die Bewegung nur in solchen Regionen verlaufen kann, in denen

$$\boxed{E \geq U(x)} \tag{3.97}$$

gilt. In dem in der Abbildung 3.6 dargestellten Potential kann sich ein Mas-

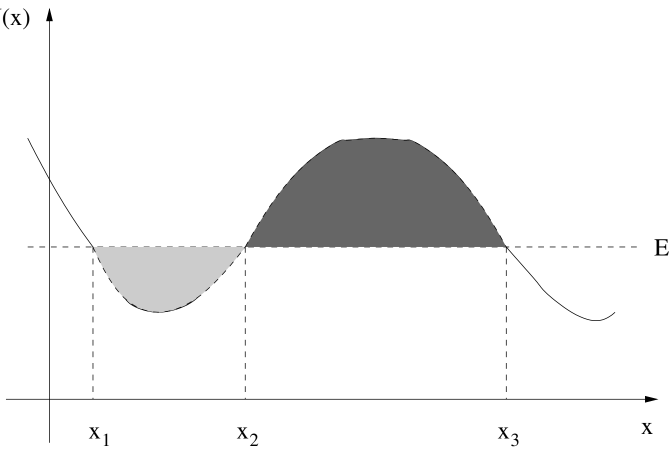

Abbildung 3.6: Potentiallandschaft mit erlaubten und verbotenen Gebieten.

senpunkt mit der angegebenen Gesamtenergie E nur in dem hell schraffierten Bereich $x_1 \leq x \leq x_2$ bewegen, während das dunkel schraffierte Gebiet

$x_2 \leq x \leq x_3$ für den Massenpunkt nicht erreichbar ist. Die Punkte x_1 und x_2 sind diejenigen Orte, an denen

$$U(x) = E \tag{3.98}$$

gilt. An diesen **Umkehrpunkten** kehrt sich die Bewegung des Massenpunkts um. Startet ein Massenpunkt an einem Punkt $x_1 \leq x \leq x_2$ in positiver x-Richtung, so kann er nur bis zu $x = x_2$ gelangen und muss dann seine Bewegung in negativer x-Richtung fortsetzen.

Da die Bewegung zwischen den Punkten x_1 und x_2 eingesperrt ist, spricht man von **gebundener Bewegung**. Im Gebiet $x \geq x_3$ ist keine Einschränkung hinsichtlich des Potentials gegeben, $U(x) \leq E$, der Massenpunkt kann also in **ungebundener Bewegung** ins Unendliche laufen. An den Punkten x_0, an denen $dU(x)/dx = 0$ ist, wirken auf den Massenpunkt keine Kräfte, diese Punkte sind also mögliche Ruhelagen des Körpers. Diese Ruhelagen können wie folgt beschrieben werden: Wir lösen die Bewegungsgleichung für einen Massepunkt an einem von der Ruhelage x_0 leicht verschoben Ort $x_0 + \Delta x$,

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x_0 + \Delta x) = -\frac{d}{dx}U(x_0 + \Delta x) \approx -\frac{d}{dx}U(x_0) - \frac{d^2}{dx^2}U(x_0)\Delta x \tag{3.99}$$

und erhalten eine Differentialgleichung für Δx der Form

$$\ddot{\Delta x} + \frac{U''(x_0)}{m}\Delta x = 0\,. \tag{3.100}$$

Für $U''(x_0) < 0$ sind die Lösungen von Gl. (3.100) exponentiell ansteigende bzw. fallende Funktionen, das heisst, die Lösung ursprünglich kleine Auslenkung Δx kann über alle Maßen anwachsen. Solch eine Lösung nennt man **instabil**. Für $U''(x_0) > 0$ beschreibt Gl. (3.100) eine harmonische Schwingung, die sich nur endlich weit von der Ruhelage entfernt. Diese Lösung bezeichnet man als **stabil**. Diese Betrachtung zeigt auch, dass die Bewegung in der Nähe jeder stabilen Ruhelage in erster Näherung als harmonische Schwingung angesehen werden kann. Diese Tatsache wird in vielen Bereichen der Physik ausgenutzt.

Bei einer dreidimensionalen Bewegung, bei der sowohl Drehimpulserhaltung als auch Energieerhaltung gilt, muss es sich um eine Bewegung in einem konservativen Zentralkraftfeld handeln. Die Bewegungsgleichung lautet also

$$m\ddot{\mathbf{r}} = f(r)\mathbf{e}_r \tag{3.101}$$

($\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$) und das Potential lautet

$$U(r) = -\int_{r_0}^{r} dr' f(r') \,. \tag{3.102}$$

Drehimpulserhaltung bedeutet, dass die Bewegung in einer Ebene verläuft, für die wir ebene Polarkoordinaten (ϱ, φ) einführen. Zusammen mit der dazu senkrecht stehenden z-Achse haben wir es mit Zylinderkoordinaten zu tun. Der Ortsvektor und der Geschwindigkeitsvektor in der (ϱ, φ)-Ebene lauten

$$\mathbf{r} = \varrho \mathbf{e}_\varrho \,, \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\varrho} \mathbf{e}_\varrho + \varrho \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi \,. \tag{3.103}$$

Der Drehimpuls hat nur eine z-Komponente $\mathbf{L} = L\mathbf{e}_z$, für die gilt

$$L = m\varrho^2 \dot{\varphi} \tag{3.104}$$

und der Energieerhaltungssatz nimmt die Form

$$E = \frac{m}{2}(\dot{\varrho}^2 + \varrho^2 \dot{\varphi}^2) + U(\varrho) \tag{3.105}$$

an. Eliminiert man $\dot{\varphi}$ aus Gl. (3.104), so wird (3.105) zu

$$E = \frac{m}{2}\dot{\varrho}^2 + U(\varrho) + \frac{L^2}{2m\varrho^2} = \frac{m}{2}\dot{\varrho}^2 + U_{\text{eff}}(\varrho) \,. \tag{3.106}$$

Der Term $L^2/(2m\varrho^2)$ ist das **Zentrifugalpotential**. Mit dem **effektiven Potential** $U_{\text{eff}}(\varrho) = U(\varrho) + \frac{L^2}{2m\varrho^2}$ bleibt dabei eine eindimensionale Bewegungsgleichung bezüglich ϱ übrig, die wie zuvor gelöst werden kann. Aus

$$\dot{\varrho}^2 = \frac{2}{m}\left[E - U_{\text{eff}}(\varrho)\right] \tag{3.107}$$

folgt die Lösung

$$t = \int \frac{d\varrho}{\sqrt{2[E - U_{\text{eff}}(\varrho)]/m}} + \text{const.} \tag{3.108}$$

und, nach Bildung der Umkehrfunktion, $\varrho(t)$. Aus dieser ergibt sich wiederum $\varphi(t)$, wenn man ϱ als Funktion von $\varphi(t)$, $\varrho = \varrho[\varphi(t)]$, versteht. Dann folgt nach der Kettenregel der Differentiation

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{d\varrho}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varrho}{d\varphi}\frac{L}{m\varrho^2} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d\varrho}{d\varphi} = \frac{d\varrho}{dt}\frac{m\varrho^2}{L} = \frac{m\varrho^2}{L}\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U_{\text{eff}}(\varrho)\right]} \tag{3.109}$$

und damit

$$\varphi = \frac{L}{m} \int \frac{d\varrho}{\varrho^2 \sqrt{2[E - U_{\text{eff}}(\varrho)]/m}} + \text{const.}\,, \tag{3.110}$$

woraus mit $\varrho = \varrho(t)$ die Lösung $\varphi = \varphi[\varrho(t)] = \varphi(t)$ folgt.

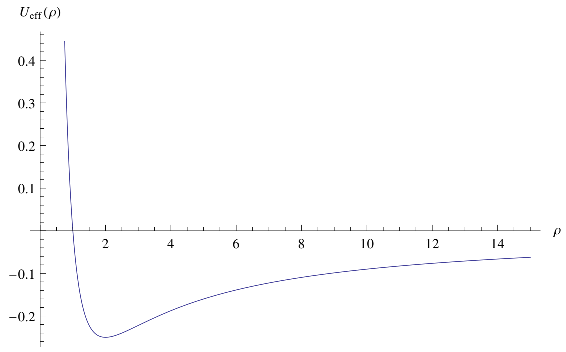

Abbildung 3.7: Effektives Potential $U_{\text{eff}}(\varrho)$ für ein Potential $U(\varrho) \propto -1/\varrho$.

In Abbildung 3.7 ist das effektive Potential $U_{\text{eff}}(\varrho)$ zu sehen, das sich aus einem Zentralpotential $U(\varrho) \propto -1/\varrho$, beispielsweise dem Newtonschen Gravitationspotential oder dem Coulombpotential, und dem Zentrifugalpotential zusammensetzt. Für große Abstände ϱ dominiert das anziehende $1/\varrho$-Potential, für kleine Abstände das Zentrifugalpotential. Gebundene Bewegungen existieren nur für $U_{\min} \leq E < 0$, ungebundene Bewegungen für $E \leq 0$.

Das Keplerproblem

Die eben ausgeführten allgemeinen Betrachtungen wollen wir nun auf das Keplerproblem, also die Bewegung der Planeten um die Sonne, anwenden. Die Gravitationskraft und das dazugehörige effektive Potential sind

$$\mathbf{F} = -\frac{GmM}{r^2}\mathbf{e}_r\,, \quad U_{\text{eff}}(\varrho) = -\frac{GmM}{\varrho} + \frac{L^2}{2m\varrho^2}\,, \tag{3.111}$$

so dass die Gesamtenergie zu

$$E = \frac{m}{2}\dot{\varrho}^2 - \frac{GmM}{\varrho} + \frac{L^2}{2m\varrho^2} \tag{3.112}$$

zu. Das Minimum des effektiven Potentials liegt bei

$$\frac{dU_{\text{eff}}(\varrho)}{d\varrho}|_{\varrho=\varrho_0} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \varrho_0 \equiv k = \frac{L^2}{Gm^2M}\,. \tag{3.113}$$

An der Position des Minimums $\varrho_0 = k$ wird das effektive Potential zu

$$U_{\text{eff}}(k) = -\frac{GmM}{2k} = -\frac{Gm^3M^2}{2L^2}\,. \tag{3.114}$$

Eine gebundene Bewegung existiert, wenn $U_{\text{eff}}(k) \leq E < 0$, d.h. wenn

$$-1 \leq \frac{2Ek}{GmM} < 0\,. \tag{3.115}$$

Eine ungebundene Bewegung liegt für $E \geq 0$ vor (siehe Abb. 3.7). Die Umkehrpunkte der Bewegung sind diejenigen Orte, an denen die Gesamtenergie gerade gleich dem effektiven Potential werden, $E = U_{\text{eff}}(\varrho)$. Diese berechnen sich zu

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{k} \pm \frac{1}{k}\sqrt{1 + \frac{2Ek}{GmM}} \equiv \frac{1}{k}\left(1 \pm \epsilon\right)\,. \tag{3.116}$$

Der minimale Wert wird bei $\varrho_{\min} = k/(1+\epsilon)$ erreicht, der maximale Wert bei $\varrho_{\min} = k/(1-\epsilon)$, wenn $\epsilon < 1$ ist. Für $\epsilon \geq 1$ gibt es keinen zweiten Umkehrpunkt, da die Bewegung ungebunden ist.

Wir werden nun die Bahnkurve berechnen, die ein Planet beim Umlauf um die Sonne durchläuft. Dazu gehen wir zu Gl. (3.110) zurück und wählen die Integrationskonstante so, dass $\varphi(\varrho_{\min}) = 0$ ist. Mit den Variablen ϵ und k schreiben wir dann

$$\frac{2m}{L^2}\left[E - U_{\text{eff}}(\varrho)\right] = \frac{\epsilon^2}{k^2}\left\{1 - \left[\frac{k}{\epsilon}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{k}\right)\right]^2\right\} \equiv \frac{\epsilon^2}{k^2}\left(1 - z^2\right)\,, \tag{3.117}$$

wobei wir die Variablensubstitution

$$z = \frac{k}{\epsilon}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{k}\right) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d\varrho}{\varrho^2} = -\frac{\epsilon}{k}dz \tag{3.118}$$

vorgenommen haben. Damit nimmt Gl. (3.110) die Form

$$\varphi = -\int\limits_1^{\frac{k}{\epsilon}\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{k}\right)} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \arccos\left[\frac{k}{\epsilon}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{k}\right)\right]\,, \tag{3.119}$$

was zu der Lösung

$$\boxed{\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{k}\,(1 + \epsilon \cos\varphi)} \tag{3.120}$$

führt. In Abhängigkeit von der Exzentrizität ϵ ist das die Gleichung verschiedener Kegelschnitte. In Tabelle 3.1 sind die wichtigsten Kegelschnitte zusammengefasst.

$\epsilon = 0$	$E = -\dfrac{GmM}{2k}$	Kreis
$0 < \epsilon < 1$	$-\dfrac{GmM}{2k} < E < 0$	Ellipse
$\epsilon = 1$	$E = 0$	Parabel
$\epsilon > 1$	$E > 0$	Hyperbel

Tabelle 3.1: Kegelschnitte für verschiedene Werte der Exzentrizität ϵ.

Die numerische Exzentrizität ϵ und der sogenannte Halbparameter k hängen mit den Halbachsen a und b einer Ellipse (bzw. eines Kreises) in der folgenden Weise zusammen (siehe Abb. 3.8):

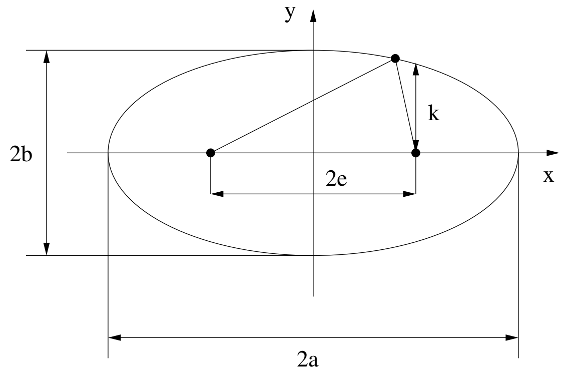

Abbildung 3.8: Ellipse mit Halbachsen a und b, deren Brennpunkte im Abstand $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ liegen. Der Halbparameter $k = b^2/a$ ist die halbe Länge der durch einen Brennpunkt parallel zur kleinen Halbachse gezogenen Sehne.

$$\epsilon = \frac{e}{a}\,, \quad e^2 = a^2 - b^2\,, \quad k = (1 - \epsilon^2)a = \frac{b^2}{a}\,. \tag{3.121}$$

Die große Halbachse a berechnet sich zu

$$a = \frac{k}{1-\epsilon^2} = -\frac{GmM}{2E} \tag{3.122}$$

und hängt somit nur von der Energie $E < 0$ ab. Die kleine Halbachse b erhält man zu

$$b^2 = ka = \frac{GmM}{2E}\frac{L^2}{Gm^2M} \quad \rightsquigarrow \quad b = \frac{|L|}{\sqrt{2m|E|}}\,. \tag{3.123}$$

Aus dem Flächensatz (3.90) folgt

$$\frac{d|\mathbf{A}|}{dt} = \frac{|\mathbf{L}|}{2m} = \frac{\pi ab}{T} \tag{3.124}$$

mit der Umlaufzeit T und der Fläche πab einer Ellipse. Setzt man die kleine Halbachse b ein und ersetzt die Energie noch durch die große Halbachse a, so erhält man die Beziehung für die Umlaufzeit

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3\,, \tag{3.125}$$

d.h. das Quadrat der Umlaufzeit ist proportional zur dritten Potenz der großen Halbachse der Ellipse, auf der sich ein Planet um die Sonne bewegt. Das ist Gegenstand der Keplerschen Gesetze, die vor Newton schon empirisch aufgestellt wurden, die wir aber hier aus den Newtonschen Axiomen herleiten konnten.

3.3 Dynamik eines Massenpunktsystems

Die bisher eingeführten Bewegungsgleichungen und Bilanzgleichungen können von einem einzigen Massenpunkt auf Massenpunktsysteme ausgedehnt werden. Als Massenpunktsysteme werden Ensembles von diskreten Massenpunkten bezeichnet, die untereinander wechselwirken können. Dabei setzen wir voraus, dass tatsächlich jeder Körper in ein solches Ensemble zerlegt werden kann. Im Extremfall könnte man denken (so wie es bis in das 19. Jahrhundert getan wurde), dass man diese Unterteilung bis auf die atomare Skala fortsetzen kann. Wir wissen aber heute, dass die klassische Mechanik auf diesen Skalen nicht mehr gilt, also müssen die diskreten Massenpunkte immer noch so groß sein, dass eine genügende Anzahl atomarer Objekte in ihnen Platz findet. Diese Massenpunkte sind also makroskopisch klein, aber immer noch mikroskopisch groß.

Wir nehmen nun an, dass wir N Massenpunkte m_i vorliegen haben, deren Ortsvektoren wir mit $\mathbf{r}_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, bezeichnen, auf die jeweils die Kräfte $\mathbf{F}_i$ wirken sollen. Die Bewegungsgleichungen nehmen also die Form

$$\boxed{m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i \,, \quad i = 1, 2, \ldots, N} \tag{3.126}$$

an. Insgesamt besteht Gl. (3.126) damit aus $3N$ gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die gelöst werden müssen, um bei gegebenen Kräften $\mathbf{F}_i$ die Bewegung der Massenpunkte eindeutig zu bestimmen.

Die auf jeden Massenpunkt wirkenden Kräfte können in zwei Kategorien aufgeteilt werden:

- Als **äußere** oder **externe** Kräfte bezeichnet man Kräfte, die von Wechselwirkungen mit Körpern außerhalb des zu untersuchenden Massenpunktsystems auf den Massenpunkt wirken.
- Als **innere** oder **interne** Kräfte werden die Wechselwirkungen der Massenpunkte innerhalb des Massenpunktsystems untereinander bezeichnet.

Wir bezeichnen die auf einen Massenpunkt m_i wirkenden äußeren Kräfte mit $\mathbf{F}_i^{(\mathrm{ext})}$ und die vom j-ten Massenpunkt auf den i-ten Massenpunkt ausgeübten wirkende innere Kraft mit $\mathbf{F}_{ij}$. Wir nehmen dabei an, dass die inneren Kräfte entlang der Verbindungsvektoren der wechselwirkenden Massenpunkte wirkt,

$$\frac{\mathbf{F}_{ij}}{|\mathbf{F}_{ij}|} = \pm \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \,. \tag{3.127}$$

Die gesamte auf den i-ten Massenpunkt wirkende Kraft ist also

$$\boxed{\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(\mathrm{ext})} + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_{ij}} \,. \tag{3.128}$$

Eigentlich muss in der Summe der Term mit $i = j$ weggelassen werden, um sogenannte Selbstwechselwirkungen auszuschließen. Da aufgrund des dritten Newtonschen Axioms aber

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} \tag{3.129}$$

gilt, ist automatisch $\mathbf{F}_{ii} = \mathbf{0}$. Die Newtonschen Bewegungsgleichungen (3.126) können also in der Form

$$\boxed{m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^{(\mathrm{ext})} + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_{ij}} \tag{3.130}$$

geschrieben werden.

3.3.1 Impulsbilanz

Die Impulsbilanzgleichung für ein Massenpunktsystem erhält man durch Summation der Bewegungsgleichungen (3.130) über alle Massenpunkte,

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{(\mathrm{ext})} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_{ij} \,. \tag{3.131}$$

Wegen der Beziehung $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ heben sich die inneren Kräfte gegenseitig auf. Damit bleibt die Relation

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{(\mathrm{ext})} \,. \tag{3.132}$$

Wir definieren nun den **Gesamtimpuls** als

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \tag{3.133}$$

sowie die resultierende äußere Gesamtkraft als

$$\mathbf{F}^{(\mathrm{ext})} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{(\mathrm{ext})} \tag{3.134}$$

und erhalten damit die Impulsbilanzgleichung für den Gesamtimpuls zu

$$\boxed{\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^{(\mathrm{ext})}} \,. \tag{3.135}$$

In Worten ausgedrückt heisst das, dass die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses gleich der Summe aller auf das Massenpunktsystem einwirkenden äußeren Kräfte ist.

Ein System heisst **abgeschlossen**, wenn keine äußeren Kräfte auf die Massenpunkte wirken, $\mathbf{F}_i^{(\mathrm{ext})} = \mathbf{0}$. In diesem Falle gilt die Impulserhaltung für den Gesamtimpuls,

$$\mathbf{F}^{(\mathrm{ext})} = \mathbf{0} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{0} \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{P} = \mathrm{const.} \tag{3.136}$$

Gesamtimpulserhaltung liefert also drei Integrale der Bewegung.

Schwerpunkts- und Relativkoordinaten

Der Gesamtimpuls kann durch die Einführung der **Massenmittelpunkts-** oder **Schwerpunktskoordinaten** veranschaulicht werden. Wir definieren den Ortsvektor $\mathbf{R}$ des Massenmittelpunkts sowie die Gesamtmasse M eines Massenpunktsystems als

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i\,, \quad M = \sum_{i=1}^{N} m_i\,. \tag{3.137}$$

Damit gilt nun

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i = M\dot{\mathbf{R}} \quad \rightsquigarrow \quad M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}^{(\mathrm{ext})}\,. \tag{3.138}$$

Der Massenmittelpunkt eines Massenpunktsystems verhält sich also genauso, als ob die Gesamtmasse in einem Massenpunkt vereinigt ist, der sich unter dem Einfluss der Summe der äußeren Kräfte bewegt. Diese Interpretation bestätigt auch im Nachhinein die Richtigkeit unserer Annahme, dass man makroskopisch große Objekte als Massenpunkte ansehen kann, wenn man von deren innerer Struktur absieht. Für die Bewegung des Schwerpunktes ist es offensichtlich unerheblich, inwieweit innere Kräfte wirken oder nicht.

Wir können nun auch den Schwerpunkt einer kontinuierlichen Massenverteilung angeben, indem wir einen Körper in infinitesimal kleine Massenelemente dm aufteilen oder, mit der Massendichte ρ, $dm = \rho\, dV$. Damit wird der Ortsvektor des Schwerpunktes (3.137) zu

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}\, dm = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}\rho\, dV\,, \quad M = \int dm = \int \rho\, dV\,. \tag{3.139}$$

Wir wollen nun noch eine Konstruktion des Massenmittelpunkts eines Massenpunktsystems angeben. Wir beginnen mit zwei Massenpunkten mit

Massen m_1 und m_2, die durch die Ortsvektoren $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ beschrieben werden. Der Ortsvektor des Schwerpunkts liegt dann auf der Verbindungslinie der beiden Massenpunkte, die im Verhältnis der beiden Massen geteilt ist, und genügt der Gleichung

$$(m_1 + m_2)\mathbf{R} = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 \quad \rightsquigarrow \quad m_1(\mathbf{R} - \mathbf{r}_1) = m_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{R})\,. \tag{3.140}$$

Nimmt man einen dritten Massenpunkt hinzu, so kann man das Verfahren iterativ durchführen, indem man den Schwerpunkt $\mathbf{R}^{(3)}$ aus dem Schwerpunkt $\mathbf{R}^{(2)}$ der Massenpunkte m_1 und m_2 sowie dem Massenpunkt m_3 bildet,

$$(m_1 + m_2 + m_3)\mathbf{R}^{(3)} = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3\,, \tag{3.141}$$

was man auch als

$$[(m_1 + m_2) + m_3]\mathbf{R}^{(3)} = (m_1 + m_2)\mathbf{R}^{(2)} + m_3\mathbf{r}_3 \tag{3.142}$$

schreiben kann. Diese Konstruktion kann nun für beliebig viele Massenpunkte durchgeführt werden, wobei die Reihenfolge, in der die einzelnen Massenpunkte einbezogen werden, egal ist.

Um die Lage von N Massenpunkten eindeutig zu beschreiben, benötigt man offensichtlich N Ortsvektoren. Diese können die absolute Lage der einzelnen Massenpunkte im Raum beschreiben, so wie es die $\mathbf{r}_i$ tun. Andererseits kann man die Lage des Schwerpunkts und $N-1$ dazugehörige **Relativkoordinaten** angeben. Diese wollen wir mit $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{N-1}$ bezeichnen. Beginnen wir wieder mit zwei Massenpunkten m_1 und m_2. Deren Schwerpunkts- und Relativkoordinaten sind

$$\mathbf{R}^{(2)} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}\,, \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\,. \tag{3.143}$$

Nimmt man einen dritten Massenpunkt hinzu, benötigen wir eine zweite Relativkoordinate, die wir bezüglich des Schwerpunkts $\mathbf{R}^{(2)}$ und der dritten Masse definieren. Wir erhalten also

$$\mathbf{R}^{(3)} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}\,, \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\,, \mathbf{x}_2 = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} - \mathbf{r}_3\,. \tag{3.144}$$

Dieses Verfahren wird wieder iterativ fortgesetzt und liefert die **Jacobikoordinaten**

$$\mathbf{x}_j = \frac{\sum\limits_{k=1}^{j} m_j\mathbf{r}_j}{\sum\limits_{k=1}^{j} m_j} - \mathbf{r}_{j+1}\,, \quad j = 1, 2, \ldots, N-1\,, \tag{3.145}$$

die, zusammen mit der Schwerpunktskoordinaten, eine eindeutige Zuordnung der Lage der Massenpunkte im Raum erlaubt.

Für ein Zweikörperproblem vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen für Schwerpunkts- und Relativkoordinaten erheblich. Bei Abwesenheit äußerer Kräfte gilt Impulserhaltung für den Gesamtimpuls. Damit gilt für die Schwerpunktskoordinate $\ddot{R} = \mathbf{0}$ und der Schwerpunkt bewegt sich geradlinig gleichförmig, $\mathbf{R}(t) = \mathbf{v}_R t + \mathbf{R}_0$. Die innere Kraft zwischen beiden Massenpunkten bezeichnen wir mit $\mathbf{F}_{12} = f(r_{12})\mathbf{r}_{12}/r_{12}$, womit für die Bewegungsgleichungen folgt:

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = f(r_{12})\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}\,, \quad m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = -f(r_{12})\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}\,. \tag{3.146}$$

Für die Relativkoordinate $\mathbf{x}_1 \equiv \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$\mu\ddot{\mathbf{r}}_{12} = f(r_{12})\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} \tag{3.147}$$

mit der **reduzierten Masse**

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,. \tag{3.148}$$

Die beiden Bewegungsgleichungen für Schwerpunkts- und Relativkoordinate entkoppeln somit.

3.3.2 Energiebilanz

Die Bilanzgleichung der kinetischen Energie für einen einzelnen Massenpunkt übernehmen wir analog zu unserer früheren Darstellung, indem wir die Bewegungsgleichung für einen Massenpunkt skalar mit dessen Geschwindigkeit multiplizieren,

$$\frac{dT_i}{dt} = P_i\,, \quad T_i = \frac{m_i}{2}|\dot{\mathbf{r}}_i|^2\,, \quad P_i = \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{F}_i\,. \tag{3.149}$$

Die Summation über alle Massenpunkte ergibt

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = P} \tag{3.150}$$

mit der kinetischen Energie $T = \sum_i T_i$ des Gesamtsystems und $P = \sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{F}_i$ der von den Kräften am Gesamtsystem verbrachten Leistung. Die zeitliche

Änderung der kinetischen Energie des Gesamtsystems ist also gleich der Leistung aller am System angreifenden Kräfte.

Sind die Kräfte $\mathbf{F}_i$, die an den einzelnen Massenpunkten angreifen, konservativ, so existiert ein Potential $U(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)$ derart, dass

$$\mathbf{F}_i = -\boldsymbol{\nabla}_i U \,. \tag{3.151}$$

In diesem Fall gilt für die Gesamtleistung P

$$P = \sum_{i=1}^{N} \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{F}_i = -\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\nabla}_i U \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial x_i^k} \frac{dx_i^k}{dt} = -\frac{dU}{dt} \tag{3.152}$$

und die Bilanzgleichung (3.150) geht über in den Erhaltungssatz der Gesamtenergie

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0 \,. \tag{3.153}$$

Für konservative Kräfte gilt also die Erhaltung der Gesamtenergie

$$T + U = E = \text{const.} \tag{3.154}$$

Im allgemeinen wirken auf die Massenpunkte sowohl konservative als auch dissipative Kräfte, $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{\text{con}}(\mathbf{r}_i) + \mathbf{F}_i^{\text{diss}}(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i, t)$, so dass mit der Gesamtleistung der dissipativen Kräfte

$$P^{\text{diss}} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{\text{diss}}(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i, t) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \tag{3.155}$$

die mechanische Energiebilanz (3.150) die Form

$$\frac{d}{dt}(T + U) = P^{\text{diss}} \tag{3.156}$$

annimmt. Da dissipative Kräfte immer mit Wechselwirkungen mit externen Körpern zusammenhängen, sind Massenpunktsysteme, in denen dissipative Kräfte auftreten, auf jeden Fall nicht abgeschlossen.

Zerlegen wir die Kräfte $\mathbf{F}_i$ wieder in externe und interne Kräfte, so können wir die Unterscheidung hinsichtlich konservativer und dissipativer Kräfte auf dieser Basis vornehmen. Da wir vorausgesetzt hatten, dass die inneren Kräfte $\mathbf{F}_{ij}$ immer entlang der Verbindungslinie zweier Massenpunkte wirken sollen, müssen sie notwendigerweise Zentralkräfte und damit konservativ sein. Wir können also Potentiale für die inneren Kräfte einführen,

$$\mathbf{F}_{ij} = f_{ij}(r_{ij})\frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}}\,, \quad \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\,, \quad r_{ij} = |\mathbf{r}_{ij}|\,, \tag{3.157}$$

die wir mit $U_{ij}(r_{ij})$ bezeichnen wollen,

$$U_{ij}(r_{ij}) = -\int_{\infty}^{r_{ij}} dr\, f_{ij}(r) = U_{ji}(r_{ij})\,. \tag{3.158}$$

Gleichzeitig gilt

$$\mathbf{F}_{ij} = -\boldsymbol{\nabla}_i U_{ij}(r_{ij}) = \boldsymbol{\nabla}_j U_{ij}(r_{ij}) = \boldsymbol{\nabla}_j U_{ji}(r_{ij}) = \boldsymbol{\nabla}_j U_{ji}(r_{ji}) = -\mathbf{F}_{ji}\,. \tag{3.159}$$

Das Gesamtpotential aller inneren Kräfte ist dann

$$U^{\text{int}} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} U_{ij}(r_{ij})\,, \tag{3.160}$$

wie man in der folgenden Weise nachvollzieht:

$$-\boldsymbol{\nabla}_i U^{\text{int}} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{\nabla}_i U_{ij}(r_{ij}) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{\nabla}_i U_{ji}(r_{ji}) = -\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{\nabla}_i U_{ij}(r_{ij}) = \mathbf{F}_{ij}\,. \tag{3.161}$$

Sind auch die äußeren Kräfte konservativ, so existiert für sie ebenfalls ein Potential

$$\mathbf{F}_i^{\text{ext}} = -\boldsymbol{\nabla}_i U_i(\mathbf{r}_i) \quad \rightsquigarrow \quad U^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^{N} U_i(\mathbf{r}_i)\,. \tag{3.162}$$

Das Gesamtpotential des konservativen Massenpunktsystems ist somit die Summe des externen und der internen Potentiale:

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} U_{ij}(r_{ij}) + \sum_{i=1}^{N} U_i(\mathbf{r}_i)}\,. \tag{3.163}$$

Virialsatz

Der Energieerhaltungssatz für abgeschlossene Systeme sagt aus, dass die mechanische Gesamtenergie, bestehend aus kinetischer und potentieller Energie, zeitlich konstant bleibt. Dabei bleibt offen, wie sich die beiden Energieformen selbst verhalten. Während einer Bewegung der Massenpunkte werden sich kinetische und potentielle Energie ständig ineinander umwandeln. Der Virialsatz macht nun Aussagen darüber, wie sich im zeitlichen Mittel die Gesamtenergie auf kinetische und potentielle Energie aufteilt.

Wir gehen von den Bewegungsgleichungen (3.126) eines einzelnen Massenpunktes aus und multiplizieren diese skalar mit $\mathbf{r}_i$,

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i = \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \,. \tag{3.164}$$

Die linke Seite schreiben wir um in

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i = \frac{d}{dt}(m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i) - m_i |\dot{\mathbf{r}}_i|^2 \,. \tag{3.165}$$

Wir nehmen nun wieder an, dass die Kräfte $\mathbf{F}_i$ ein Potential besitzen, so dass Gl. (3.164), summiert über alle Massenpunkte, als

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}(m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i) - \sum_{i=1}^{N} m_i |\dot{\mathbf{r}}_i|^2 = -\sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\nabla}_i U \tag{3.166}$$

geschrieben werden kann.

Wir interessieren uns für den zeitlichen Mittelwert der Gleichung (3.166). Für jede zeitabhängige Funktion $f(t)$ definieren wir den zeitlichen Mittelwert als

$$\overline{f(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} dt' f(t') \,. \tag{3.167}$$

Angewandt auf Gl. (3.166) gibt das

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i \Bigg|_{t-T/2}^{t+T/2} = \overline{\sum_{i=1}^{N} m_i |\dot{\mathbf{r}}_i|^2} - \overline{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\nabla}_i U} \,. \tag{3.168}$$

Für gebundene Bewegungen sind alle Positionen und Geschwindigkeiten endlich, so dass die linke Seite von (3.168) im Limes $T \to \infty$ verschwindet. Damit wird aus Gl. (3.168)

$$\overline{\sum_{i=1}^{N} m_i|\dot{\mathbf{r}}_i|^2} = \overline{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\nabla}_i U} \,. \tag{3.169}$$

Die linke Seite ist das Doppelte der mittleren kinetischen Energie $2\overline{T}$, die rechte Seite bezeichnet man als das **Virial**, wir erhalten also

$$\boxed{\overline{T} = \frac{1}{2}\overline{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\nabla}_i U}} \,, \tag{3.170}$$

die mittlere kinetische Energie ist also gleich dem halben Virial des Massenpunktsystems.

Als Spezialfälle betrachten wir Potentiale, die homogene Funktionen n-ten Grades sind. Darunter verstehen wir Funktionen, die der Bedingung $U(\lambda r) = \lambda^n U(r)$ genügen. Für solche Potentiale gilt

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\nabla}_i U = nU \tag{3.171}$$

und damit

$$\overline{T} = \frac{n}{2}\overline{U} \,. \tag{3.172}$$

Ist das Potential vom Typ $U(r) \propto 1/r$, also $n = -1$, wie im Falle des Gravitations- oder des Coulombpotentials, finden wir $\overline{T} = -\overline{U}/2$ und somit $E = \overline{T} + \overline{U} = \overline{U}/2$. Für Potentiale vom Typ $U(r) \propto r^2$, also für $n = 2$, wie für harmonische Oszillatoren (Federschwinger oder Fadenpendel), findet man $\overline{T} = \overline{U}$ und damit $E = \overline{T} + \overline{U} = 2\overline{U}$.

3.3.3 Drehimpulsbilanz

Zur Bestimmung der Drehimpulsbilanz gehen wir wieder von den Bewegungsgleichungen (3.126) eines Massenpunktes aus und multiplizieren diese vektoriell mit $\mathbf{r}_i$ und erhalten

$$\frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \mathbf{M}_i \,, \quad \mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \,, \quad \mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \,. \tag{3.173}$$

Summation über alle Massenpunkte ergibt

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} \tag{3.174}$$

mit dem Gesamtdrehimpuls $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i$ und dem Gesamtdrehmoment $\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{M}_i$.

Teilen wir wieder die Kräfte in interne und externe Kräfte auf, so folgt für das Gesamtdrehmoment

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \left(\mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i,j=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} \,. \tag{3.175}$$

Der Beitrag der internen Kräfte verschwindet dabei, wie aus dem dritten Newtonschen Axiom $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ und der Tatsache, dass es sich um Zentralkräfte handelt, folgt. Dieses zeigt man in der folgenden Weise:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} - \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{0} \,. \end{aligned} \tag{3.176}$$

Das Gesamtdrehmoment setzt sich somit nur aus den Beiträgen der externen Kräfte zusammen,

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}} = \mathbf{M}^{\text{ext}} \,, \tag{3.177}$$

und die Drehimpulsbilanz lautet

$$\boxed{\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^{\text{ext}}}, \tag{3.178}$$

die zeitliche Änderung des Gesamtdrehimpulses ist also gleich dem von außen wirkenden Drehmoment der äußeren Kräfte. Gesamtdrehimpulserhaltung gilt, wenn $\mathbf{M}^{\text{ext}} = \mathbf{0}$ ist, d.h. wenn die inneren Kräfte Zentralkräfte sind. In diesem Fall gilt $\mathbf{L} = \text{const.}$, was drei unabhängigen Integralen der Bewegung entspricht.

Drehung um eine feste Achse

Wir zeichnen nun wiederum die z-Achse aus und definieren sie als die Drehachse. Der Gesamtdrehimpuls hat dann in z-Richtung die Komponente

$$L_z = \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i \dot{y}_i - \dot{x}_i y_i) = \sum_{i=1}^{N} m_i \varrho_i^2 \dot{\varphi}_i \,, \tag{3.179}$$

wobei wir in der letzten Gleichung Polarkoordinaten in der (x, y)-Ebene eingeführt haben (also insgesamt Zylinderkoordinaten). Falls die z-Komponente des Gesamtdrehmoments verschwindet, $M_z = 0$, dann ist $L_z = \text{const}$. Nehmen wir desweiteren an, dass die Massenpunkte feste Abstände voneinander haben, dann handelt es sich um einen **starren Körper**. Die einzelnen Massenpunkte bewegen sich dann mit derselben Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_i = \omega$, und wir finden

$$L_z = \sum_{i=1}^{N} m_i \varrho_i^2 \omega \equiv \Theta\omega \,, \quad \Theta = \sum_{i=1}^{N} m_i \varrho_i^2 \tag{3.180}$$

mit dem **Trägheitsmoment** Θ. Für kontinuierliche Massenverteilungen können wir wie bei der Berechnung des Schwerpunkts zu infinitesimalen Massenelementen dm übergehen und das Trägheitsmoment als

$$\Theta = \int \varrho^2 \, dm = \int \rho \varrho^2 \, dV \tag{3.181}$$

schreiben.

Ist das Trägheitsmoment bezüglich einer durch den Schwerpunkt verlaufenden Drehachse bekannt, so kann es auf einfache Weise bezüglich beliebiger um den Betrag a parallel verschobener Drehachsen mithilfe des **Steinerschen Satzes** berechnet werden. Es sollen mit ϱ_i' die Abstände der Massenpunkte vom Massenmittelpunkt sein. Dann gilt $\varrho_i^2 = \varrho_i'^2 + a^2 - 2a\varrho_i' \cos\theta_i$ und damit für das Trägheitsmoment

$$\Theta = \sum_{i=1}^{N} m_i \varrho_i^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i \varrho_i'^2 + Ma^2 - 2a \sum_{i=1}^{N} m_i \varrho_i' \cos\theta_i \,. \tag{3.182}$$

Der erste Term ist gerade das Trägheitsmoment Θ_a bezüglich der durch den Schwerpunkt verlaufenden Drehachse, und der letzte Term verschwindet aufgrund der Definition des Massenmittelpunkts. Damit bleibt für das Trägheitsmoment bezüglich der verschobenen Drehachse

$$\boxed{\Theta = \Theta_a + Ma^2} \,. \tag{3.183}$$

Dies ist genau die Aussage des Steinerschen Satzes, dass das Trägheitsmoment nur bezüglich einer durch den Schwerpunkt laufenden Achse berechnet werden muss.