

# Kapitel 2

## Kinematik eines freien Massenpunktes

In der Physik werden zur Beschreibung eines jeden Sachverhaltes vereinfachende Annahmen gemacht, um ein Problem auf seine wesentliche Eigenschaften zu reduzieren und um damit ein Grundverständnis eines physikalischen Zusammenhangs zu erhalten. In der Mechanik ist die Grundannahme die eines **Massenpunktes**, das heisst, eines Objektes der Masse  $m$ , dessen Ausdehnung in alle Richtungen vernachlässigt werden kann. Das heisst nicht, dass der Körper selbst klein sein muss. Zum Beispiel reicht es bei der Beschreibung der Planetenbewegungen um die Sonne aus, die Bewegung der Massenschwerpunkte der Planeten zu betrachten. Desweiteren wollen wir zunächst fordern, dass sich der Massenpunkt frei bewegen kann, womit wir meinen, dass dessen Bewegung nicht durch äußere Zwangsbedingungen, wie z.B. die Bewegung eines Schlittschuhläufers, eingeschränkt wird. Auf solche Zwangsbedingungen gehen wir im Detail in den Kapiteln zur Lagrangeschen und Hamiltonschen Mechanik ein.

### 2.1 Bahnkurve, Geschwindigkeit, Beschleunigung

In der Kinematik werden zuerst die verschiedenen Formen der möglichen Bewegungsabläufe untersucht, ohne auf die Entstehung oder die Ursachen dieser Bewegung einzugehen. Zur mathematischen Beschreibung der Bewegung eines Massenpunktes sind Begriffe wie die **Bahnkurve** notwendig, die in der

Vorlesung 'Theoretische Physik I — Mathematische Methoden' eingeführt wurden. Dazu führen wir ein **Koordinatensystem** oder Bezugssystem ein, bezüglich dessen die Bewegung beschrieben wird. Der Koordinatenursprung  $O$ , also der Bezugspunkt, relativ zu welchem die Bewegung gemessen wird, kann beispielsweise die Erde, ein Labor oder ein beliebiger starrer Körper sein. Die Lage oder Position  $P$  eines Körpers bezüglich dieses Ursprungs ist durch den **Ortsvektor**  $\overline{OP} = \mathbf{r}$  gegeben, dessen rechtwinklige Komponenten die kartesischen Koordinaten  $x, y, z$  sind. Oft ist es allerdings zweckmäßig, andere Koordinatensysteme wie Zylinderkoordinaten oder Kugelkoordinaten zu verwenden.

Die Bewegung eines Massenpunktes ist vollständig durch die Angabe seiner Bahnkurve charakterisiert, das heisst, wenn der Ortsvektor als Funktion der Zeit bekannt ist,

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}(t). \quad (2.1)$$

In kartesischen Koordinaten, in denen die Basisvektoren starr sind, gilt also

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y + z(t)\mathbf{e}_z. \quad (2.2)$$

Wir nehmen dabei an, dass die Funktionen  $x(t), y(t), z(t)$  eindeutig und mindestens zweimal stetig differenzierbar sind. Die Raumkurve, die durch den zeitveränderlichen Ortsvektor  $\mathbf{r}(t)$  beschrieben wird, heisst die **Bahnkurve** des Massenpunktes.

Zur Definition der **Geschwindigkeit** erinnern wir uns an die Konstruktion, wie sie in Abb. 2.1 gezeigt ist. Der Massenpunkt befinde sich zum Zeit-

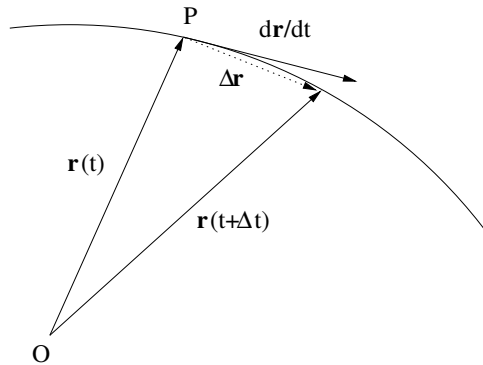


Abbildung 2.1: Zeitliche Änderung des Ortsvektors entlang der Bahnkurve.

punkt  $t$  am Punkt  $P$ , und nach einem kleinen Zeitschritt  $\Delta t$  am Punkt, der durch den Ortsvektor  $\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \Delta \mathbf{r}$  beschrieben wird. Die bezüglich der kurzen Zeitspanne  $\Delta t$  mittlere Verrückung des Ortsvektors ist

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \quad (2.3)$$

und selbst noch von der Zeitspanne  $\Delta t$  abhängig. Im Limes  $\Delta t \rightarrow 0$  findet man dann den Vektor der **Geschwindigkeit** zu

$$\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}. \quad (2.4)$$

In kartesischen Koordinaten wird die Geschwindigkeit demnach zu

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y + \dot{z}\mathbf{e}_z. \quad (2.5)$$

Wie aus Abb. 2.1 ebenfalls ersichtlich ist, liegt der Vektor der Geschwindigkeit tangential an der Bahnkurve. Das heisst, wir können den Geschwindigkeitsvektor derart in einen Betrag und einen Einheitsvektor zerlegen, dass

$$\mathbf{v} = v\mathbf{t} \quad (2.6)$$

gilt, wobei  $\mathbf{t}$  der **Tangenteneinheitsvektor** an die Bahnkurve ist und  $v = |\mathbf{v}|$  der Betrag der Geschwindigkeit. Entlang der Bahnkurve legt der Massenpunkt eine Wegstrecke  $s(t)$  zurück, die **Bogenlänge**. Drückt man die Bahnkurve als Funktion der Bogenlänge aus,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}[s(t)]$ , so folgt für die Geschwindigkeit nach der Kettenregel der Differentiation

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \underbrace{\frac{d\mathbf{r}}{ds}}_{\mathbf{t}} \underbrace{\frac{ds}{dt}}_v, \quad (2.7)$$

was gerade Gl. (2.6) ist.

Analog dazu wird der Vektor der **Beschleunigung** als die zeitliche Änderung des Geschwindigkeitsvektors definiert:

$$\mathbf{a} \equiv \dot{\mathbf{v}} \equiv \ddot{\mathbf{r}} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}. \quad (2.8)$$

In kartesischen Koordinaten ist die Beschleunigung damit einfach

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{e}_x + \ddot{y}\mathbf{e}_y + \ddot{z}\mathbf{e}_z. \quad (2.9)$$

Aus Gl. (2.6) folgt, dass

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\mathbf{t}) = \dot{v}\mathbf{t} + v\dot{\mathbf{t}} \quad (2.10)$$

ist. Die zeitliche Ableitung des Tangenteneinheitsvektors  $\mathbf{t}$  berechnet sich zu

$$\dot{\mathbf{t}} = \frac{d\mathbf{t}}{dt} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \underbrace{\frac{ds}{dt}}_v = v \frac{d\mathbf{t}}{ds}. \quad (2.11)$$

Aufgrund der Normierung  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1$  folgt, dass

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d\mathbf{t}}{ds} \cdot \mathbf{t} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d\mathbf{t}}{ds} \perp \mathbf{t}. \quad (2.12)$$

Die Ableitung des Tangenteneinheitsvektors nach der Bogenlänge ist also ein Vektor, der senkrecht zu diesem steht und aus dem der **Hauptnormaleneinheitsvektor**

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\kappa} \frac{d\mathbf{t}}{ds} = R \frac{d\mathbf{t}}{ds} \quad (2.13)$$

mit der Krümmung  $\kappa = |d\mathbf{t}/ds|$  bzw. dem Krümmungsradius  $R = 1/\kappa$  konstruiert werden kann (siehe Abb. 2.2). Den Krümmungsradius erhält man aus

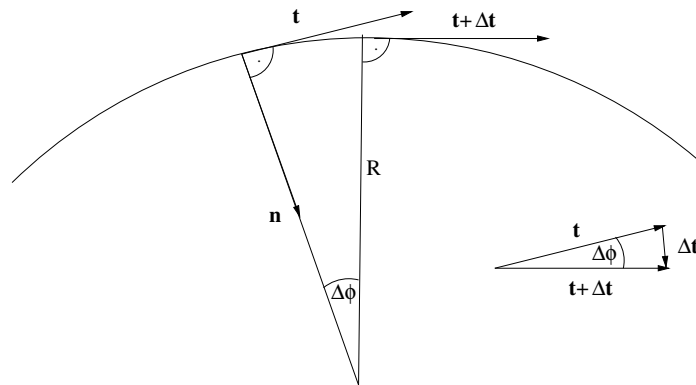


Abbildung 2.2: Richtung des Hauptnormaleneinheitsvektors und Definition des Krümmungsradius  $R$ .

der Identifizierung des Winkels  $\Delta\phi$  im Limes  $\Delta t \rightarrow 0$  als  $d\phi = ds/R = |d\mathbf{t}|$ . Damit wird der Vektor der Beschleunigung zu

$$\mathbf{a} = \dot{v}\mathbf{t} + \frac{v^2}{R}\mathbf{n}. \quad (2.14)$$

Der Beschleunigungsvektor besteht also aus einem Anteil, der von der Betragsänderung der Geschwindigkeit herrührt, sowie einem Anteil, der von der Richtungsänderung der Geschwindigkeit stammt.

Die an jedem Punkt  $\mathbf{r}$  durch die Einheitsvektoren  $\mathbf{t}$  und  $\mathbf{n}$  aufgespannte Ebene heißt **Schmiegeebene** der Bahnkurve. Aus Gl. (2.14) wird ersichtlich, dass der Beschleunigungsvektor immer in der Schmiegeebene liegt. Der Hauptnormaleneinheitsvektor zeigt dabei in Richtung der Krümmung der Bahnkurve. Zusätzlich zu den Einheitsvektoren  $\mathbf{t}$  und  $\mathbf{n}$  kann noch ein dritter, auf beiden senkrecht stehender, Einheitsvektor, der **Binormaleneinheitsvektor**, konstruiert werden, der aber nur dann benötigt wird, wenn die Beschleunigung selbst zeitabhängig ist.

## 2.2 Krummlinige Koordinatensysteme

Nicht alle Bewegungen lassen sich sinnvoll in kartesischen Koordinaten beschreiben. Beispielsweise würde man die Bewegung eines Massenpunktes auf einer Kreisbahn besser in Polarkoordinaten oder Kugelkoordinaten darstellen. Für andere Probleme sind sicher auch andere krummlinige Koordinatensysteme anwendbar. Außer in kartesischen Koordinaten sind in allen anderen Koordinatensystemen die Einheitsvektoren selbst ortsabhängig.

In jedem Koordinatensystem werden **Koordinatenlinien** definiert, die dadurch entstehen, dass man alle bis auf eine der Koordinaten fest hält und nur eine einzige Koordinate variiert. So sind beispielsweise in Polarkoordinaten  $(\varrho, \varphi)$  die  $\varphi$ -Koordinatenlinien konzentrische Kreise, während die  $\varrho$ -Koordinatenlinien vom Ursprung ausgehende Strahlen sind. Wenn die Koordinatenlinien senkrecht aufeinander stehen (wie in kartesischen, Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten), so spricht man von **orthogonalen** krummlinigen Koordinaten. Im allgemeinen Fall handelt es sich um **schiefwinklige** krummlinige Koordinaten. In letzterem Fall gibt es zwei verschiedene Arten von Koordinaten und Basisvektoren.

Wir hatten bisher die Basisvektoren als die Tangenteneinheitsvektoren an die Koordinatenlinien  $x^i(x, y, z)$  definiert. In schiefwinkligen Koordinaten definiert dies die sogenannten **kovarianten** Basisvektoren

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}. \quad (2.15)$$

Andererseits können über den Gradienten

$$\mathbf{g}^i = \nabla x^i \quad (2.16)$$

die **kontravarianten** Basisvektoren definiert werden, die senkrecht auf der Fläche  $x^i = \text{const.}$  stehen. In orthogonalen Koordinaten sind beide Sätze von Basisvektoren parallel zueinander,  $\mathbf{g}_i \parallel \mathbf{g}^i$ .

Mithilfe der kovarianten und kontravarianten Basisvektoren wird eine **Metrik** konstruiert, die die Geometrie der jeweiligen Koordinaten charakterisiert. Das geschieht über die Skalarprodukte

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j, \quad (2.17)$$

$$g^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j. \quad (2.18)$$

Die gemischten Skalarprodukte aus kovarianten und kontravarianten Basisvektoren sind allerdings

$$g_i^j = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} \cdot \nabla x^j = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta_i^j, \quad (2.19)$$

also sind beide Sätze von Basisvektoren gegenseitig orthogonal. Beide Sätze von Basisvektoren können zur Entwicklung eines beliebigen Vektors  $\mathbf{r}$  benutzt werden,

$$\mathbf{r} = r^i \mathbf{g}_i = r_i \mathbf{g}^i, \quad (2.20)$$

wobei mit  $r_i$  die kovarianten Komponenten und mit  $r^i$  die kontravarianten Komponenten des Vektors  $\mathbf{r}$  bezeichnet werden. In Gl. (2.20) ist die **Einsteinsche Summenkonvention** angewandt worden, nach der über zwei gleich kovariante und kontravariante Indizes summiert wird, d.h.  $r^i \mathbf{g}_i \equiv \sum_{i=1}^3 r^i \mathbf{g}_i$ .

Die Umrechnung zwischen kovarianten und kontravarianten Koordinaten erfolgt mithilfe des **metrischen Tensors**  $g_{ik}$  bzw.  $g^{ik}$ . So gilt

$$r_i = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{r} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j r^j = g_{ij} r^j \quad (2.21)$$

und umgekehrt

$$r^i = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{r} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j r_j = g^{ij} r_j. \quad (2.22)$$

Man sagt, dass die Vektorindizes durch den metrischen Tensor gehoben oder gesenkt werden. Für die Kontraktion zweier metrischer Tensoren gilt

$$g_{ij} g^{ik} = (\mathbf{g}_j \cdot \mathbf{g}_i)(\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^k) = \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{g}^k = \delta_j^k. \quad (2.23)$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{s}$  ist dann in dieser Notation

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = r_i s^j \underbrace{\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j}_{\delta_j^i} = r_i s^i \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = r^i s_j \underbrace{\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j}_{\delta_i^j} = r^i s_i. \quad (2.24)$$

Der metrische Tensor bestimmt die Länge des Bogenelements  $ds^2$  in den gewählten Koordinaten. Das totale Differential ist gegeben durch

$$d\mathbf{r} = \mathbf{g}_i dr^i = \mathbf{g}^i dr_i, \quad (2.25)$$

und damit das Bogenelement durch

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = g_{ij} dr^i dr^j = g^{ij} dr_i dr_j. \quad (2.26)$$

Das Volumenelement  $dV$  ist durch das Volumen des durch die Basisvektoren aufgespannte Parallelepipeds gegeben, also

$$dV = |\mathbf{g}_1 \cdot (\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3)| dr^1 dr^2 dr^3 \quad (2.27)$$

Die **Funktionaldeterminante**  $g = \det g_{ij} > 0$  ist mit dem Volumen des Parallelepipeds über

$$|\mathbf{g}_1 \cdot (\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3)| = \sqrt{g} \quad (2.28)$$

verknüpft, so dass das Volumenelement als

$$dV = \sqrt{g} dr^1 dr^2 dr^3 \quad (2.29)$$

geschrieben werden kann. Man muss also nur das Produkt der Differentiale mit der Wurzel aus der Determinanten des metrischen Tensors multiplizieren, um das Volumenelement zu erhalten. Die Flächen des Parallelepipeds berechnen sich zu

$$d\mathbf{S}^1 = \mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3 dr^2 dr^3 = \mathbf{g}^1 \sqrt{g} dr^2 dr^3, \quad (2.30)$$

und analog für  $d\mathbf{S}^2$  und  $d\mathbf{S}^3$ . Aus diesen allgemeinen Formeln folgen ebenso die Darstellungen der Vektoroperatoren Gradient, Divergenz und Rotation in beliebigen Koordinaten.

In orthogonalen Koordinatensystemen fallen kovariante und kontravariante Koordinaten zusammen und die jeweiligen Basisvektoren sind parallel, das heisst, der metrische Tensor ist in diesen Koordinaten diagonal,

$$g_{ij} = h_i^2 \delta_{ij}, \quad (2.31)$$

wobei die  $h_i$  Skalenfaktoren sind. Man beachte, dass in dieser Gleichung nicht über den Index  $i$  summiert wird. Die kovarianten und kontravarianten Basisvektoren können dann zu Einheitsvektoren normiert werden,

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{g}^i}{h_i} = h_i \mathbf{g}^i. \quad (2.32)$$

Dies ist äquivalent dazu, die Einheitsvektoren in den krummlinigen Koordinaten über

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r^i} = h_i \mathbf{e}_i \quad (2.33)$$

einzuführen, wobei wiederum nicht über den Index summiert wird.

### Polarkoordinaten

Als Beispiel betrachten wir zunächst die Polarkoordinaten ( $r^1 = \varrho, r^2 = \varphi$ ), die über

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi \quad (2.34)$$

definiert sind. Das Bogenelement ist gegeben durch

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\varphi^2, \quad (2.35)$$

was äquivalent zu den bekannten Skalenfaktoren  $h_\varrho = 1$  und  $h_\varphi = \varrho$  ist. Der Ortsvektor drückt sich in Polarkoordinaten wie

$$\mathbf{r} = \varrho \mathbf{e}_\varrho = \varrho \cos \varphi \mathbf{e}_x + \varrho \sin \varphi \mathbf{e}_y \quad (2.36)$$

aus. Die Einheitsvektoren sind demnach

$$\mathbf{e}_\varrho = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varrho} = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y, \quad (2.37)$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y, \quad (2.38)$$

und deren zeitliche Ableitungen berechnen sich zu

$$\dot{\mathbf{e}}_\varrho = -\dot{\varphi} \sin \varphi \mathbf{e}_x + \dot{\varphi} \cos \varphi \mathbf{e}_y = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad (2.39)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \cos \varphi \mathbf{e}_x - \dot{\varphi} \sin \varphi \mathbf{e}_y = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_\varrho. \quad (2.40)$$

Die Vektoren der Geschwindigkeit und Beschleunigung sind demnach in Polarkoordinaten

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\varrho} \mathbf{e}_\varrho + \dot{\varphi} \varrho \mathbf{e}_\varphi, \quad (2.41)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{\varrho} - \dot{\varphi}^2 \varrho) \mathbf{e}_\varrho + (\ddot{\varphi} \varrho + 2\dot{\varrho} \dot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi. \quad (2.42)$$



## Kugelkoordinaten

Die Kugelkoordinaten ( $r^1 = r, r^2 = \Theta, r^3 = \varphi$ ) sind definiert über

$$x = r \sin \Theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \Theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \Theta. \quad (2.43)$$

Das Bogenelement ist gegeben durch

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\Theta^2 + r^2 \sin^2 \Theta d\varphi^2, \quad (2.44)$$

was identisch ist mit den Skalenfaktoren

$$h_r = 1 \quad h_\Theta = r \quad h_\varphi = r \sin \Theta. \quad (2.45)$$

Der Ortsvektor in Kugelkoordinaten ist dann

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r = r \sin \Theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + r \sin \Theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + r \cos \Theta \mathbf{e}_z. \quad (2.46)$$

Die Einheitsvektoren berechnen sich zu

$$\mathbf{e}_r = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \sin \Theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \Theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \Theta \mathbf{e}_z, \quad (2.47)$$

$$\mathbf{e}_\Theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Theta} = \cos \Theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \cos \Theta \sin \varphi \mathbf{e}_y - \sin \Theta \mathbf{e}_z, \quad (2.48)$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y. \quad (2.49)$$

Die zeitliche Änderung der Einheitsvektoren berechnet sich zu

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\Theta} \mathbf{e}_\Theta + \dot{\varphi} \sin \Theta \mathbf{e}_\varphi, \quad (2.50)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\Theta = -\dot{\Theta} \mathbf{e}_r + \dot{\varphi} \cos \Theta \mathbf{e}_\varphi, \quad (2.51)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \sin \Theta \mathbf{e}_r - \dot{\varphi} \cos \Theta \mathbf{e}_\Theta. \quad (2.52)$$

Als ein kleiner Test für die Richtigkeit der Berechnungen stellen wir fest, dass die zeitliche Änderung der Einheitsvektoren senkrecht auf diesen steht. Mit diesen Vorarbeiten erhalten wir die Vektoren der Geschwindigkeit in Kugelkoordinaten als

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\Theta} \mathbf{e}_\Theta + r \sin \Theta \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi \quad (2.53)$$

sowie den Vektor der Beschleunigung als

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \left( \ddot{r} - r \dot{\Theta}^2 - \dot{\varphi}^2 r \sin^2 \Theta \right) \mathbf{e}_r \\ &+ \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left( r^2 \dot{\Theta} \right) - \varphi^2 r \sin \Theta \cos \Theta \right] \mathbf{e}_\Theta \\ &+ \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{d}{dt} \left( \dot{\varphi} r^2 \sin^2 \Theta \right) \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (2.54)$$

## 2.3 Grundtypen der Bewegung

In der Kinematik werden zunächst allgemeine Fragen nach der Bewegung eines Massenpunktes beantwortet. Beispielsweise kann die Geschwindigkeit oder die Beschleunigung eines Massenpunktes als Funktion der Zeit gegeben sein, und die Bahnkurve ist gesucht. Umgekehrt kann man die Frage stellen, wie man aus einer bekannten Bahnkurve die Geschwindigkeit und Beschleunigung ableiten kann. Dazu werden wir uns im Folgenden die verschiedenen Grundtypen der Bewegung ansehen.

### 2.3.1 Geradlinig gleichförmige Bewegung

Die einfachste Form der Bewegung ist die geradlinig gleichförmige Bewegung. Für diese gilt

$$\dot{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{v} = \text{const.} \quad (2.55)$$

und damit  $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$ . Die Bewegungsgleichung (2.55) ist eine einfache Differentialgleichung erster Ordnung, deren allgemeine Lösung

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(t - t_0) + \mathbf{r}_0 \quad (2.56)$$

lautet. Die Bewegung erfolgt auf einer Geraden, deren Richtung durch die Geschwindigkeit vorgegeben wird.

### 2.3.2 Gleichförmig beschleunigte Bewegung

Eine gleichförmig beschleunigte Bewegung ist charakterisiert durch

$$\ddot{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{a} = \text{const.} \quad (2.57)$$

Hierbei handelt es sich um eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, die aber ebenfalls einfach aufintegriert werden kann. Für die Geschwindigkeit findet man sofort

$$\dot{\mathbf{r}}(t) \equiv \mathbf{v}(t) = \mathbf{a}(t - t_0) + \mathbf{v}_0. \quad (2.58)$$

Eine weitere Integration liefert die Bahnkurve zu

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}(t - t_0)^2 \mathbf{a} + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \mathbf{r}_0, \quad (2.59)$$

wobei wir die Anfangsbedingungen für die Position und die Geschwindigkeit des Massenpunktes mit  $\mathbf{r}_0$  und  $\mathbf{v}_0$  bezeichnet haben. Selbstverständlich

können anstelle der Anfangsbedingungen auch zwei Randbedingungen für den Ortsvektor angegeben werden, um die Bahnkurve eindeutig zu bestimmen. Aus Gl. (2.59) ist ersichtlich, dass die Bewegung in der Ebene verläuft, die von den Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{v}_0$  aufgespannt wird. Formal kann die Bewegung in zwei Anteile aufgespalten werden, eine geradlinig gleichförmige Bewegung, die mit einer gleichförmig beschleunigten, geradlinigen Bewegung überlagert ist.

Da eine gleichförmig beschleunigte Bewegung in einer Ebene abläuft, können wir ein Koordinatensystem  $(x, y)$  bezüglich dieser Ebene einführen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit legen wir fest, dass die Beschleunigung nur eine  $y$ -Komponente besitzen soll,  $\mathbf{a} = a\mathbf{e}_y$ . Das ist zum Beispiel bei der Gravitationsbeschleunigung auf der Erde der Fall, wenn die  $y$ -Achse senkrecht nach oben zeigt. Dann ist  $a = -g$ .

Die Anfangsgeschwindigkeit zerlegen wir in Komponenten als

$$\mathbf{v}_0 = v_{0x}\mathbf{e}_x + v_{0y}\mathbf{e}_y. \quad (2.60)$$

Damit werden die Komponenten des Ortsvektors in (2.59) zu

$$x - x_0 = v_{0x}(t - t_0), \quad (2.61)$$

$$y - y_0 = \frac{a}{2}(t - t_0)^2 + v_{0y}(t - t_0). \quad (2.62)$$

Löst man Gl. (2.61) nach  $t - t_0$  auf und setzt das Ergebnis in (2.62) ein, so erhält man als Bahngleichung

$$y - y_0 = \frac{a}{2v_{0x}^2}(x - x_0)^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}(x - x_0) \quad (2.63)$$

eine Parabel in der  $(x, y)$ -Ebene.

### Senkrechter Wurf

Wir betrachten nun einige Spezialfälle dieser Bewegung. Habe zunächst der Vektor der Anfangsgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_0$  nur eine  $y$ -Komponente,  $\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{e}_y$ . Dann ist die Bewegung entartet in dem Sinn, dass sich die Parabel zu einer Geraden zusammenzieht. In diesem Fall wird die Gleichung der Bahnkurve zu

$$y - y_0 = \frac{a}{2}(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0). \quad (2.64)$$

Zusammen mit  $v = a(t - t_0) + v_0$  können damit Wurfhöhe und Flugzeiten berechnet werden.

## Schräger Wurf

Im allgemeinen wird die Anfangsgeschwindigkeit nicht in derselben Richtung wie die Beschleunigung liegen. Wir nehmen daher an, dass der Vektor der

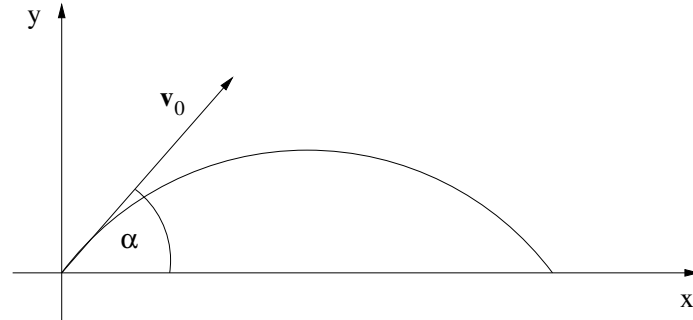


Abbildung 2.3: Schematischer schräger Wurf in der  $(x, y)$ -Ebene. Der Vektor der Anfangsgeschwindigkeit bildet einen Winkel  $\alpha$  mit der  $x$ -Achse.

Geschwindigkeit einen Winkel  $\alpha$  mit der  $x$ -Achse bildet. Vereinfachend setzen wir zudem  $t_0 = 0$  sowie  $x_0 = y_0 = 0$ , so dass die Bewegung zum Zeitpunkt  $t = 0$  im Koordinatenursprung beginnt (siehe Abb. 2.3.) Die Beschleunigung sei die als konstant angenommene Gravitationsbeschleunigung in der Nähe der Erdoberfläche,  $a = -g$ . Mit diesen Vereinfachungen lauten die Gleichungen (2.61) und (2.62)

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad (2.65)$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2. \quad (2.66)$$

Die Wurfparabel ist demnach

$$y = x \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2. \quad (2.67)$$

Die Spezialfälle des horizontalen bzw. des vertikalen Wurfs erhält man mit den Winkeln  $\alpha = 0$  bzw.  $\alpha = \pm\pi/2$ . Aus den Gleichungen (2.65)–(2.3.2) folgen alle wichtigen Größen zur Charakterisierung eines Wurfs.

**Steigzeit** So ist die Steigzeit  $t_s$  durch die Bedingung  $\dot{y} = 0$  bestimmt. Damit ergibt sich aus Gl. (2.66)

$$v_0 \sin \alpha - g t_s = 0 \quad \rightsquigarrow \quad t_s = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (2.68)$$

**Wurfdauer** Die Flugdauer  $t_d$  ergibt sich aus der Bedingung  $y(t_d) = 0$ . Wenn der Wurf aus einer Höhe  $h$  erfolgt, so muss  $y(t_d) = -h$  gesetzt werden. In diesem Fall folgt aus Gl. (2.66)

$$y(t_d) = -h \quad \rightsquigarrow \quad -h = v_0 t_d \sin \alpha - \frac{g}{2} t_d^2 \quad (2.69)$$

und damit

$$t_d = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}}. \quad (2.70)$$

Es ist zu beachten, dass die unphysikalische zweite Lösung der quadratischen Gleichung schon weggelassen wurde. In dem in Abb. 2.3 skizzierten Fall ist  $h = 0$  und damit  $t_d = 2v_0 \sin \alpha / g = 2t_s$ .

**Wurfhöhe und Wurfweite** Die Wurfhöhe erhält man mithilfe der Steigzeit zu

$$y(t_s) = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (2.71)$$

Die Wurfweite für  $h = 0$  ist

$$x(t_d) = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}, \quad (2.72)$$

woraus man sofort abliest, dass die Wurfweite für  $\alpha = 45^\circ$  maximal wird.

### 2.3.3 Gleichförmige Kreisbewegung

Wir kommen nun zu einer speziellen Form der beschleunigten Bewegung, der gleichförmigen Bewegung auf einer Kreisbahn mit Radius  $R$  mit konstanter Bahngeschwindigkeit  $v = |\mathbf{v}| = \text{const}$  (siehe Abb. 2.4). Die Bewegung auf einer Kreisbahn wird am besten in ebenen Polarkoordinaten (mit  $z = 0$ ) beschrieben. Die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors sind

$$v_\rho = \dot{\rho} = 0, \quad v_\varphi = \rho \dot{\varphi} = R\omega = v = \text{const}. \quad (2.73)$$

mit der konstanten **Winkelgeschwindigkeit**  $\omega = \dot{\varphi}$  um die  $z$ -Achse. Die Bahnkurve wird beschrieben durch

$$\dot{\varphi} = \omega = \frac{v}{R} = \text{const}. \quad \rightsquigarrow \quad \varphi = \omega(t - t_0) + \varphi_0. \quad (2.74)$$

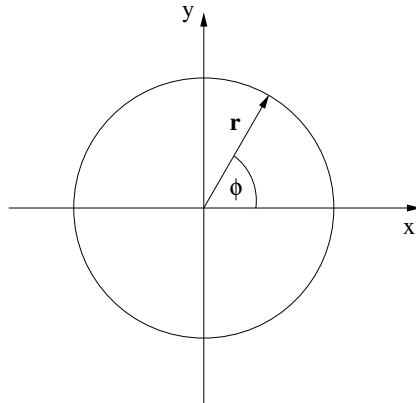


Abbildung 2.4: Bewegung auf einer Kreisbahn.

Obwohl die Bahngeschwindigkeit als konstant vorausgesetzt wurde, folgt aus Gl. (2.42) für die Beschleunigung

$$a_\rho = -\rho\dot{\varphi}^2 = -\omega^2 R = -\frac{v^2}{R}, \quad a_\varphi = 0. \quad (2.75)$$

Das heisst, eine gleichförmige Kreisbewegung ist trotzdem eine beschleunigte Bewegung. Die Beschleunigung zeigt zum Mittelpunkt des Kreises,

$$\mathbf{a} = -\omega^2 R \mathbf{e}_\rho = -\frac{v^2}{R} \mathbf{e}_\rho \quad (2.76)$$

und wird deshalb **Radialbeschleunigung** genannt.

Die **Umlaufzeit**  $T$  ist diejenige Zeit  $\Delta t$ , nach der der Winkel  $\Delta\varphi = 2\pi$  zurückgelegt wurde. Diese Zeit berechnet sich zu

$$2\pi = \Delta\varphi = \omega\Delta t = \omega T \quad \rightsquigarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f. \quad (2.77)$$

Damit wird der Zusammenhang zwischen der Winkelgeschwindigkeit und der **Frequenz**  $f$  bestimmt. Die Winkelgeschwindigkeit oder **Kreisfrequenz** ist demnach um einen Faktor  $2\pi$  größer als die Frequenz.

### 2.3.4 Periodische Bewegungen

Betrachtet man die Bewegung auf einer Kreisbahn projiziert auf eine der beiden kartesischen Achsen, so fällt auf, dass diese projizierten Bewegungen

lineare periodische Bewegungen sind, für die

$$x(t+T) = x(t) \quad (2.78)$$

mit der **Periodendauer** oder **Schwingungsdauer**  $T$  gilt. In der Tat wird die Kreisbewegung in kartesischen Koordinaten durch

$$x(t) = R \cos(\omega t + \varphi_0), \quad y(t) = R \sin(\omega t + \varphi_0) = R \cos(\omega t + \varphi_0 - \pi/2) \quad (2.79)$$

beschrieben. Genauer gesagt, die Kreisbewegung ist eine Überlagerung zweier senkrecht zueinander verlaufender periodischer Bewegungen mit einem Phasenunterschied von  $\pi/2$ .

Hat eine periodische Bewegung (2.78) die spezielle Form

$$x(t) = A \cos(\omega t + \alpha), \quad (2.80)$$

so spricht man von einer **harmonischen** Schwingung mit positiver **Amplitude**  $A$  und **Phase**  $\alpha$ . Manchmal wird der Begriff Phase auch auf das gesamte Argument  $\varphi = \omega t + \alpha$  angewandt. In Anlehnung an die Kreisbewegung wird mit der Frequenz  $f = 1/T$  die Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit bezeichnet, und mit der Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi/T$  die Anzahl der Schwingungen pro  $2\pi$  Zeiteinheiten.

Die Geschwindigkeit des harmonischen Oszillators ist

$$\dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \alpha). \quad (2.81)$$

Sie hat ihre maximalen Werte  $\pm\omega A$  zu den Zeitpunkten, an denen die Schwingung ihren Nulldurchgang besitzt, und sie verschwindet in den Umkehrpunkten der Bewegung. Erneutes Differenzieren liefert die Beschleunigung zu

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \alpha). \quad (2.82)$$

Die Beschleunigung ist demnach exakt um  $\pi$  zur Bewegung phasenverschoben, sie ist also der Auslenkung immer entgegengerichtet.

Man erkennt, dass die Auslenkung  $x(t)$  einer harmonischen Schwingung und die dazugehörige Beschleunigung die Beziehung

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (2.83)$$

erfüllen. Diese Gleichung ist uns schon als Schwingungsdifferentialgleichung bekannt. Wir hatten auch gesehen, dass alle Lösungen dieser Differentialgleichung die Form (2.80) haben. Alle physikalischen Objekte oder Phänomene,

die der Differentialgleichung (2.83) genügen, werden als **harmonische Oszillatoren** bezeichnet.

Der harmonische Oszillator ist eines der wichtigsten Konzepte der gesamten Physik, mit dem eine Vielzahl unterschiedlicher Probleme beschrieben werden kann. Beispiele aus der Mechanik, die uns in dieser Vorlesung noch begegnen werden, sind der Federschwinger oder das Fadenpendel. In der Elektrodynamik wird die Ausbreitung von elektrischen und magnetischen Feldern durch harmonische Oszillatoren beschrieben, da sich die Maxwell'schen Gleichungen (oder besser die Helmholtzgleichung) ebenfalls in die Form (2.83) bringen lassen. Das heisst auch, dass die Quantentheorie des Lichts, auf (quantisierten) harmonischen Oszillatoren beruht. In allen physikalischen Problemen, in denen gebundene Bewegungen in Potentialen behandelt werden, können die Potentiale in der Nähe ihres Minimums per Taylorentwicklung als Parabeln approximiert werden, die, wie wir später sehen werden, auf die Schwingungsdifferentialgleichung (2.83) führen. Demnach sind alle Probleme und Aufgabenstellungen aus Mechanik, Quantentheorie oder Thermodynamik von physikalischen Systemen in der Nähe ihrer Ruhelage auf harmonische Oszillatoren zurückführbar.

### Superposition von Schwingungen gleicher Frequenz

Da die Schwingungsdifferentialgleichung (2.83) eine homogene lineare Differentialgleichung ist, sind beliebige Linearkombinationen ihrer Lösungen ebenfalls wieder Lösungen. Um diese Superpositionen mathematisch zu beschreiben, ist es einfacher, Gl. (2.80) in eine komplexe Schreibweise zu überführen. Wir schreiben also

$$x(t) = Ae^{i\omega t}, \quad A = |A|e^{i\alpha} \quad (2.84)$$

mit der komplexen Amplitude  $A$ , die die Anfangsphase  $\alpha$  enthält.

Addieren wir zunächst zwei Schwingungen gleicher Frequenz und gleicher Richtung mit

$$x_1(t) = A_1e^{i\omega t}, \quad x_2(t) = A_2e^{i\omega t} \quad (2.85)$$

mit komplexen Amplituden  $A_1 = |A_1|e^{i\alpha_1}$  und  $A_2 = |A_2|e^{i\alpha_2}$ . Dann ist die Überlagerung aus beiden Schwingungen

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = (A_1 + A_2)e^{i\omega t} \quad (2.86)$$

wiederum eine Schwingung mit der Kreisfrequenz  $\omega$ , aber der neuen Amplitude  $A = A_1 + A_2$ . Diese können wir nach den üblichen Rechenregeln mit



komplexen Zahlen umformen in  $A = |A|e^{i\alpha}$  mit

$$|A| = \sqrt{|A_1|^2 + |A_2|^2 + 2|A_1||A_2|\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}, \quad (2.87)$$

$$\tan \alpha = \frac{|A_1| \sin \alpha_1 + |A_2| \sin \alpha_2}{|A_1| \cos \alpha_1 + |A_2| \cos \alpha_2}. \quad (2.88)$$

Aus diesen Formeln wird noch einmal deutlich, dass man komplexe Zahlen als Vektoren in der Ebene auffassen kann und damit die übliche Vektoralgebra auf sie angewendet werden kann (siehe Abb. 2.5). Bei festgehaltenen

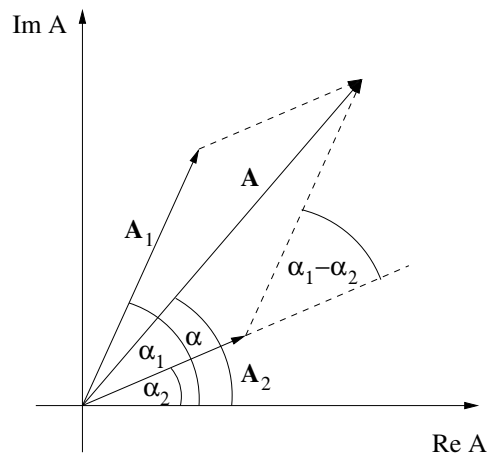


Abbildung 2.5: Addition zweier komplexer Zahlen  $A_1$  und  $A_2$  in der komplexen Ebene, die durch Realteil und Imaginärteil aufgespannt wird.

Amplituden  $|A_1|$  und  $|A_2|$  hängt die Amplitude  $|A|$  der Superposition von der Phasendifferenz  $\alpha_1 - \alpha_2$  ab und kann zwischen den Werten  $|A_1| + |A_2|$  (**konstruktive Interferenz**) für  $\alpha_1 - \alpha_2 = 2n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) und  $|A_1| - |A_2|$  (**destruktive Interferenz**) für  $\alpha_1 - \alpha_2 = (2n + 1)\pi$  variieren. Insbesondere können sich die Schwingungen vollständig auslöschen, wenn  $|A_1| = |A_2|$  ist.

### Superposition von Schwingungen verschiedener Frequenz

Sobald die Kreisfrequenzen der beiden überlagerten Schwingungen nicht übereinstimmen, wird auch deren Superposition nicht mehr in der einfachen Form (2.80) vorliegen. In der Tat ist die resultierende Schwingung

$$x(t) = A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t} \quad (2.89)$$

nur dann periodisch, wenn die Kreisfrequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  ein rationales Verhältnis zueinander haben, also die Relation

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbf{N} \quad (2.90)$$

gilt. In diesem Fall findet man eine Periodendauer  $T = 2\pi/\omega$  mit  $\omega_1 = p\omega$  und  $\omega_2 = q\omega$ .

Wir betrachten zunächst den Spezialfall gleicher Amplitude,  $|A_1| = |A_2|$ . Die resultierende Schwingung hat also die Form

$$\begin{aligned} x(t) &= |A_1| [e^{i(\omega_1 t + \alpha_1)} + e^{i(\omega_2 t + \alpha_2)}] \\ &= |A_1| [e^{i(\omega_- t + \alpha_-)} e^{i(\omega_+ t + \alpha_+)} + e^{-i(\omega_- t + \alpha_-)} e^{i(\omega_+ t + \alpha_+)}] \\ &= 2|A_1| \cos(\omega_- t + \alpha_-) e^{i(\omega_+ t + \alpha_+)}, \end{aligned} \quad (2.91)$$

wobei wir die Summen- und Differenzgrößen

$$\omega_{\pm} = \frac{\omega_1 \pm \omega_2}{2} \quad \text{und} \quad \alpha_{\pm} = \frac{\alpha_1 \pm \alpha_2}{2} \quad (2.92)$$

definiert haben. Wenn sich die Kreisfrequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  nur unwesentlich unterscheiden, dann ist die Differenzfrequenz  $\omega_-$  viel kleiner als die Summenfrequenz  $\omega_+$ , also  $\omega_- \ll \omega_+$ . Effektiv heisst das, dass die langsame veränderliche Funktion  $\cos(\omega_- t + \alpha_-)$  zur Amplitude dazugeschlagen werden kann. Das Resultat ist eine **Schwebung** der Kreisfrequenz  $\omega_+ \sim \omega_1 \sim \omega_2$  mit einer Amplitude, die sich mit der Kreisfrequenz  $\omega_-$  zwischen den Werten 0 und  $2|A_1|$  bewegt (siehe Abb. 2.6). Die Zeitdauer zwischen zwei Knoten der Schwebung beträgt gerade  $T_s = \pi/\omega_-$  und wird Schwebungsdauer genannt, die dazugehörig Kreisfrequenz  $\omega_s = 2\omega_- = |\omega_1 - \omega_2|$  die Schwebungsfrequenz. Sind die Amplituden der zu überlagernden Schwingungen nicht exakt gleich, verschwindet die Schwebungsamplitude nicht vollständig.

## Harmonische Analyse und Fourierreihen

Ein periodisches Signal, das die Bedingung (2.78) erfüllt, kann aus mehr als nur ein oder zwei harmonischen Schwingungen bestehen. Die harmonische Analyse oder **Fourieranalyse** stellt ein Verfahren bereit, die harmonischen Bestandteile des Signals zu rekonstruieren. Um diese Rekonstruktion eindeutig ausführen zu können, müssen wir fordern, dass die Funktion  $x(t)$  stückweise stetig ist, das heisst, das sich das Definitionsgebiet von  $x(t)$  in

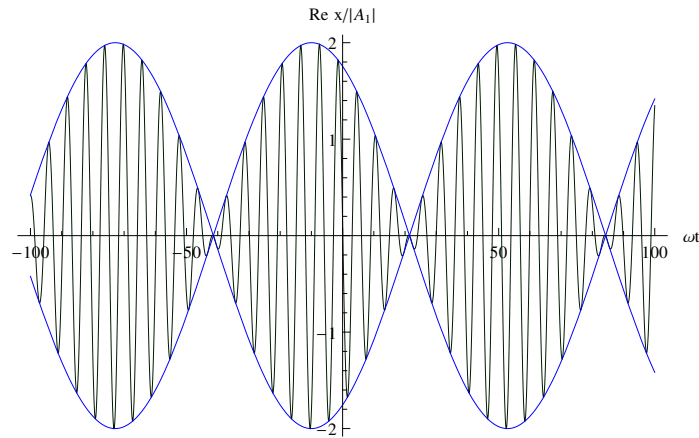


Abbildung 2.6: Schwebung als Überlagerung zweier Schwingungen gleicher Amplitude und leicht verschiedener Frequenz.

endlich viele Intervalle zerlegen läßt, in denen das Signal stetig und monoton ist. Zum anderen müssen an den Unstetigkeitsstellen die links- und rechtsseitigen Grenzwerte  $x(t - 0)$  und  $x(t + 0)$  wohldefiniert sein.

In der Vorlesung 'Mathematische Methoden' hatten wir gesehen, dass die Fourieranalyse darauf beruht, dass die trigonometrischen Funktionen  $\cos 2\pi nt/T$  und  $\sin 2\pi nt/T$  auf jedem Intervall der Länge  $T$  eine vollständige Basis für Funktionen der Form (2.78) bilden. Dasselbe gilt demzufolge auch für die komplexen Funktionen des Typs  $e^{2\pi int/T}$ . Wir wollen demzufolge eine periodische Funktion  $x(t)$  in eine **Fourierreihe** der Art

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.93)$$

zerlegen und die Koeffizienten  $c_n$  bestimmen. Verlangen wir, dass die Funktion  $x(t)$  reell ist, dann gilt für die Fourierkoeffizienten die Bedingung

$$x(t) = x^*(t) \quad \rightsquigarrow \quad c_n = c_{-n}^*. \quad (2.94)$$

Multipliziert man Gl. (2.93) mit einer der Basisvektoren  $e^{-im\omega t}$  und integriert

über ein beliebiges Intervall der Länge  $T$ , so erhält man

$$\int_{t_0}^{t_0+T} dt x(t) e^{-im\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{t_0}^{t_0+T} dt e^{i(n-m)\omega t} = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta_{nm} = T c_m \quad (2.95)$$

und somit die Umkehrformel zu Gl. (2.93)

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} dt x(t) e^{-in\omega t} . \quad (2.96)$$

Für reelle periodische Funktionen  $x(t)$  kann die Fourierreihe (2.93) umgeschrieben werden in

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t}] \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n e^{in\omega t} + c_n^* e^{-in\omega t}] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t] \end{aligned} \quad (2.97)$$

mit

$$a_n = c_n + c_n^* = 2\operatorname{Re} c_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} dt x(t) \cos n\omega t , \quad (2.98)$$

$$b_n = i(c_n - c_n^*) = -2\operatorname{Im} c_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} dt x(t) \sin n\omega t . \quad (2.99)$$

Demzufolge können sowohl trigonometrische als auch exponentielle Funktionen als Basisvektoren für die Fourieranalyse periodischer Funktionen verwendet werden.

Läßt man die Periodendauer  $T$  sehr groß werden,  $T \rightarrow \infty$ , so gehen die Gleichungen (2.93) und (2.96) in die Integraldarstellungen

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega X(\omega) e^{i\omega t} \Leftrightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt x(t) e^{-i\omega t} \quad (2.100)$$

über, wobei wir den Faktor  $1/(2\pi)$  ungleichmäßig auf die Integrale verteilt haben. Dies ist einzig eine Konvention. Man findet in der Literatur auch Darstellungen, in denen sowohl bei der Hintransformation als auch bei der Rücktransformation ein Faktor  $1/\sqrt{2\pi}$  symmetrisch verteilt wird. Beide Varianten sind gültig, wenn sie nur konsequent angewandt werden.

### Superposition harmonischer Schwingungen verschiedener Richtung

Wir betrachten nun die Situation, in der zwei harmonische Schwingungen, zunächst gleicher Frequenz, aber in senkrecht zueinander stehenden Richtungen miteinander überlagert werden. Nehmen wir also an, zwei Schwingungen

$$x(t) = A \cos(\omega t + \alpha), \quad y(t) = B \cos(\omega t + \beta), \quad (2.101)$$

die zu harmonischen Oszillatoren in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung gehören, werden überlagert. Dazu schreiben wir

$$\frac{y(t)}{B} = \cos(\omega t + \beta) = \cos(\omega t + \alpha + \delta), \quad \delta = \beta - \alpha \quad (2.102)$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{y(t)}{B} &= \cos(\omega t + \alpha) \cos \delta - \sin(\omega t + \alpha) \sin \delta \\ &= \frac{x(t)}{A} \cos \delta - \sqrt{1 - \frac{x^2(t)}{A^2}} \sin \delta. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Daraus ergibt sich die Beziehung

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \delta = \sin^2 \delta. \quad (2.104)$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse, die schräg in der  $(x, y)$ -Ebene liegt (siehe Abb. 2.7). Der Ortsvektor  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y$  folgt also einer elliptischen Bahn, die in einem Rechteck mit den Seitenlängen  $2A$  und  $2B$  eingeschrieben ist.

Die Exzentrizität der Ellipse, also das Verhältnis der beiden Hauptachsen, ändert mit der Phasenverschiebung  $\delta$ . Für  $\delta = 0, \pi$  vereinfacht sich Gl. (2.104) zu

$$\left(\frac{x}{A} \mp \frac{y}{B}\right)^2 = 0. \quad (2.105)$$

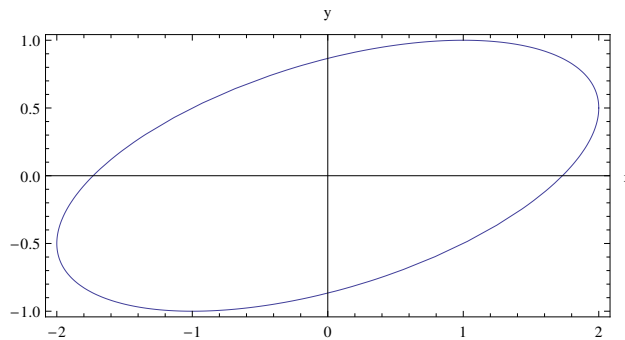


Abbildung 2.7: Überlagerung zweier Schwingungen mit  $A = 2$  und  $B = 1$  mit einer Phasenverschiebung  $\delta = \pi/6$ .

In beiden Fällen entartet die Ellipse zu einer Geraden, im Falle  $\delta = 0$  zu  $y = (B/A)x$ , im Falle  $\delta = \pi$  zu  $y = -(B/A)x$ . Für  $\delta = \pi/2$  und  $\delta = 3\pi/2$  wird Gl. (2.104) zu

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1, \quad (2.106)$$

und die Hauptachsen der Ellipse fallen mit den Koordinatenachsen zusammen (siehe Abb. 2.8). Der Unterschied zwischen beiden Phasen besteht im Umlaufsinn der Bahnkurve. Die Bahnkurve wird für  $\delta \in (0, \pi)$  im Uhrzeigersinn durchlaufen, für  $\delta \in (\pi, 2\pi)$  in entgegengesetzter Richtung.

Sind die Kreisfrequenzen beider Schwingungen nicht exakt gleich, sondern leicht voneinander verschieden, so kann man die resultierende Bewegung als die einer zeitlich veränderlichen Phasenverschiebung auffassen. Das heisst, die Ellipse wird ihre Form periodisch ändern. Bilden die Frequenzen ein rationales Verhältnis, so bleibt die Bahnkurve zeitlich unverändert und geschlossen. Die dabei entstehenden Figuren heißen auch **Lissajous-Figuren**. Auf der Webseite von Wolfram Research (den Herstellern von Mathematica), unter <http://demonstrations.wolfram.com/LissajousFigures/> finden Sie eine sehr gute Demonstration zu Lissajous-Figuren.

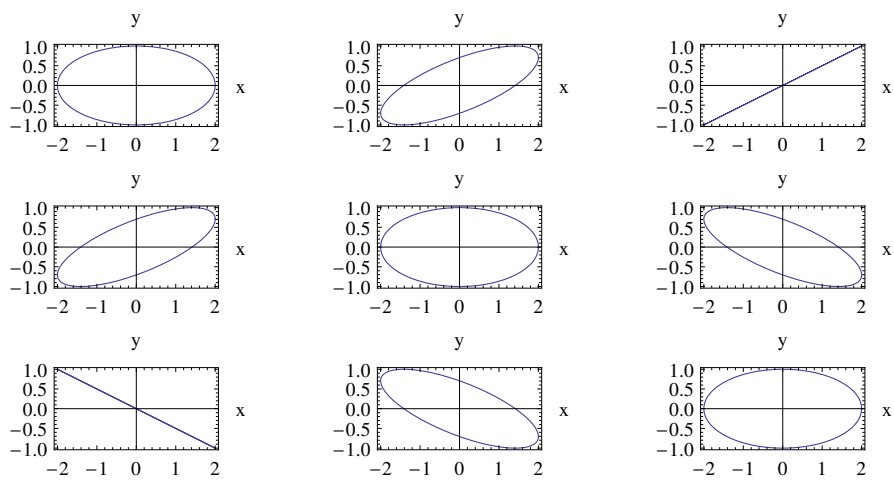


Abbildung 2.8: Abhängigkeit der Ellipsenform von der Phasendifferenz  $\delta = 0 \dots 2\pi$ .