

Kapitel 6

Fourierreihen und Fourierintegrale

6.1 Einführung

Wir haben im vorigen Kapitel gesehen, dass die Lösungen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung oszillierende Funktionen sein können. Das bedeutet, die Lösungen sind periodisch mit einer gewissen Periodendauer T , so dass

$$f(t + nT) = f(t) \tag{6.1}$$

für beliebige ganzzahlige Werte von n gilt. Manchmal kann man aber nicht unbedingt sofort erkennen, welchen analytischen Verlauf eine solche periodische Funktion besitzt. Ziel der Fourieranalyse ist es nun, eine Darstellung einer beliebigen periodischen Funktion $f(t)$ auf einem Intervall $[0, T]$ — und später auch nichtperiodischer Funktionen auf der ganzen reellen Achse — über elementare periodische Funktionen auszudrücken.

Für experimentelle Untersuchungen (Signalanalyse bzw. -verarbeitung) ist die Fourieranalyse ebenso wichtig, um die (dominanten oder charakteristischen) Frequenzen eines experimentell ermittelten zeitlich veränderlichen Signals zu bestimmen. Die Fourieranalyse zerlegt also ein zeitliches Signal in seine einzelnen Frequenzkomponenten, sein **Spektrum**. Periodizität ist nicht nur auf zeitliche Phänomene beschränkt, sondern kann auch räumliche Periodizitäten einschließen. Gitter sind ein Beispiel für räumlich periodische Strukturen. Räumliche Fourieranalyse spielt in der Bildverarbeitung und -kompression eine große Rolle.

6.2 Fourierreihen

Wir beginnen mit einer Funktion $f(t)$ mit einer Periode T , die wir durch trigonometrische Funktionen mit derselben Periode ausdrücken wollen. Das heißt, wir versuchen, die Funktion $f(t)$ mithilfe von Funktionen $\cos n\omega t$ und $\sin n\omega t$ mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$ auszudrücken. Im mathematischen Sinn versuchen wir dabei, die Funktion $f(t)$ in Basisfunktionen eines speziellen Vektorraumes zu zerlegen. Wir hatten schon gesehen, dass man Vektorräume definieren kann, deren Elemente Funktionen sind. So ist zum Beispiel der Raum $L_2(0, T)$ der Raum quadratisch integrierbarer Funktionen auf dem Intervall $[0, T]$, für das ein inneres Produkt oder Skalarprodukt

$$(f, g) = \int_0^T dt f(t)g(t) \quad (6.2)$$

definiert ist. Die trigonometrischen Funktionen sind in diesem Raum ein vollständiger Satz von Basisfunktionen $\{1, \cos n\omega t, \sin n\omega t\}$, da die Beziehungen

$$\int_0^T dt \sin m\omega t \sin n\omega t = \frac{T}{2} \delta_{mn}, \quad \int_0^T dt \cos m\omega t \cos n\omega t = \frac{T}{2} \delta_{mn} \quad (6.3)$$

und

$$\int_0^T dt \sin m\omega t \cos n\omega t = 0 \quad (6.4)$$

gelten. Diese Relationen zeigt man durch Anwendung der Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen $\sin \alpha \sin \beta = [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]/2$ und $\cos \alpha \cos \beta = [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]/2$.

Die Funktionen

$$c_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos n\omega t \quad \text{und} \quad s_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin n\omega t \quad (6.5)$$

mit $\omega = 2\pi/T$ und $n \in \mathbb{N}$ bilden also in der Tat ein vollständiges orthogonales System aus Basisvektoren, in die jede periodische Funktion zerlegt werden kann. Wir schreiben also

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t. \quad (6.6)$$

Der Term mit a_0 ist ein konstanter Offset. Die Terme mit $n = 1$ beschreiben die **Grundschwingungen**, die mit $n > 1$ die **Oberschwingungen**.

Die Konvergenz der Fourierreihe kann unter sehr allgemeinen Annahmen gezeigt werden. Dazu muss es möglich sein, das Definitionsintervall der Funktion in endlich viele Teilintervalle zu zerlegen, in denen die Funktion stetig und monoton ist. An den Unstetigkeitsstellen sollen jeweils der linksseitige Grenzwert $f_-(t_0)$ als auch der rechtsseitige Grenzwert $f_+(t_0)$ definiert sein. Unter diesen (Dirichletschen) Bedingungen konvergiert die Fourierreihe gegen $f(t)$ an den Stellen, an denen die Funktion stetig ist, und gegen das arithmetische Mittel

$$\frac{f_-(t_0) + f_+(t_0)}{2} \quad (6.7)$$

an den Unstetigkeitsstellen.

Aus den Orthogonalitätsrelationen der trigonometrischen Funktionen findet man sofort die Entwicklungskoeffizienten zu

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T dt f(t) \cos n\omega t = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} dt [f(t) + f(-t)] \cos n\omega t, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T dt f(t) \sin n\omega t = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} dt [f(t) - f(-t)] \sin n\omega t. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Die jeweils letzten Relationen folgen daher, dass das Integrationsintervall aufgrund der Periodizität von $[0, T]$ zu $[t_0, T + t_0]$ verschoben werden kann. Wir sehen auch, dass die Cosinusfunktionen die geraden Anteile der Funktion $f(t)$ herauspicken, während die Sinusfunktionen die ungeraden Anteile beschreiben. Genauer gesagt, ist $f(t)$ eine gerade Funktion mit $f(t) = f(-t)$, so gilt für ihre Fourierkoeffizienten

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T dt f(t) \cos n\omega t = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} dt f(t) \cos n\omega t, \quad b_n = 0. \quad (6.9)$$

Ist andererseits die Funktion $f(t)$ ungerade, also gilt $f(t) = -f(-t)$, so gilt

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T dt f(t) \sin n\omega t = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} dt f(t) \sin n\omega t. \quad (6.10)$$

Als erstes Beispiel für eine Fourierreihe betrachten wir die Sägezahnfunktion (siehe Abb. 6.1)

$$y = x \quad \text{für} \quad 0 < x < 2\pi. \quad (6.11)$$

Dies ist offensichtlich eine verschobene ungerade Funktion, was man sofort einsieht, wenn die Funktion um π nach unten verschoben wird, also $a_0 = 2\pi$ gesetzt wird. Damit verschwinden alle Koeffizienten $a_{n>0}$. Die Koeffizienten b_n werden unter Verwendung von $T = 2\pi$ und $\omega = 2\pi/T = 1$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dx x \sin nx = -\frac{2}{n}. \quad (6.12)$$

Damit erhalten wir

$$y = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}. \quad (6.13)$$

Die Approximation der Sägezahnfunktion durch eine Fourierreihe mit Ter-

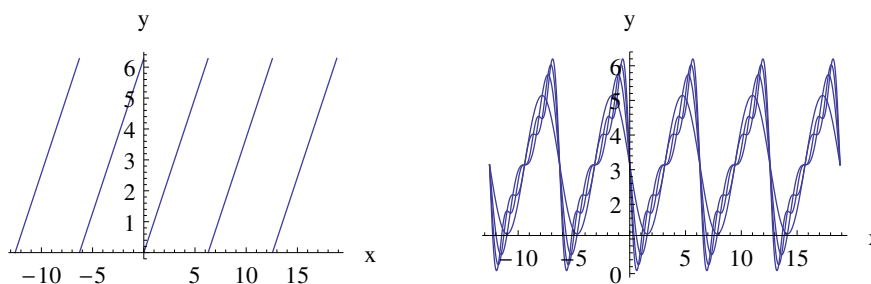


Abbildung 6.1: Sägezahnfunktion (links) und ihre Approximation durch eine Fourierreihe mit Termen bis $n = 1, 2, 3, 4$ (rechts).

men bis zu $n = 1, 2, 3, 4$ ist ebenfalls in Abbildung 6.1 dargestellt. Man erkennt, dass schon eine geringe Anzahl von Fourierkoeffizienten ausreicht, um die Funktion recht gut zu approximieren. Offensichtlich benötigt man die höheren Entwicklungskoeffizienten für die Darstellung sehr kleiner Details wie z.B. der scharfen Ecken der Sägezahnfunktion.

Als Beispiel für eine gerade Funktion betrachten wir die Rechteckfunktion (siehe Abb. 6.2)

$$y = 1 \quad \text{für} \quad 0 < x < \pi/2, 3\pi/2 < x < 2\pi. \quad (6.14)$$

Wir haben also die Integrale

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} dx \cos nx + \frac{1}{\pi} \int_{3\pi/2}^{2\pi} dx \cos nx = \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \quad (6.15)$$

zu berechnen. Die Fourierreihe wird damit zu

$$y = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \dots \right] = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos(2n+1)x. \quad (6.16)$$

In Abbildung 6.2 sind die ersten Approximationen der Rechteckfunktion

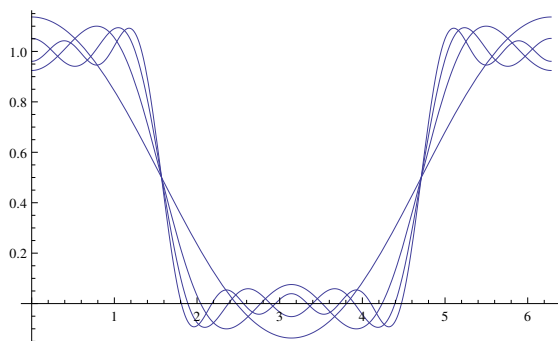


Abbildung 6.2: Approximationen der Rechteckfunktion durch immer genauere Fourierreihen mit $k = 1, 2, 3, 4$ Termen.

durch Fourierreihen mit $k = 1, 2, 3, 4$ Termen zu sehen. Auch hier wird bei Hinzunahme höherer Frequenzen die Funktion immer besser angenähert.

Dieser Gedanke wird in der Bildkompression konsequent verfolgt. Ein Bild wird in ein (zweidimensionales) Raster von Punkten zerlegt und deren Fourierkoeffizienten berechnet. Nur diese werden dann abgespeichert. Um Speicherplatz zu sparen, werden nur die niedrigsten Koeffizienten gespeichert mit dem Ergebnis, dass feine Details wie scharfe Kanten oder andere scharfe Kontrastübergänge nicht berücksichtigt werden.

6.2.1 Weitere Darstellungen der Fourierreihe

Anstelle der Darstellung (6.6) kann man auch andere Formulierungen verwenden. Beispielsweise kann man jeweils die Sinus- und Cosinusterme mit

denselben Frequenzen zu einer verschobenen Sinusfunktion zusammenfassen. Greifen wir uns zwei Terme aus (6.6) heraus, so können wir schreiben

$$\begin{aligned} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t &= A_n \sin \varphi \cos n\omega t + A_n \cos \varphi \sin n\omega t \\ &= A_n \sin(n\omega t + \varphi_n), \end{aligned} \quad (6.17)$$

wobei wir $a_n = A_n \cos \varphi_n$ und $b_n = A_n \sin \varphi_n$ gesetzt haben und das Additionstheorem $\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta)$ verwendet haben. Damit wird die Fourierreihe in **spektraler Darstellung**

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \quad (6.18)$$

mit $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ und $\tan \varphi = a_n/b_n$. Die Koeffizienten A_n geben dabei das **Amplitudenspektrum** der Funktion $f(t)$ und die Phasen φ_n das **Phasenspektrum**, also die Phasenwinkel der n -ten Fourierkomponenten.

Eine weitere wichtige Darstellung, die uns zu den Fourierintegralen führen wird, erhält man, wenn man die trigonometrischen Funktionen zu komplexen Exponentialfunktionen zusammenfasst. Die **komplexe Darstellung** der Fourierreihe ist dann

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t} \quad (6.19)$$

mit $\omega_n = n\omega$. Die Koeffizienten c_n erhält man zu

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T dt f(t) e^{-i\omega_n t} = \begin{cases} a_0/2 & n = 0 \\ (a_n - ib_n)/2 & n > 0 \\ (a_{-n} + ib_{-n})/2 & n < 0 \end{cases} \quad (6.20)$$

mit den Verknüpfungen der neuen und alten Koeffizienten auf der rechten Seite der Gleichung. Man beachte, dass in der Fourierreihe (6.19) und in den Koeffizienten die Frequenzen mit jeweils umgekehrten Vorzeichen eingehen.

6.3 Fourierintegrale

Bisher haben wir nur die Fourierzerlegung periodischer Funktionen auf einem endlichen Intervall betrachtet. Dies wollen wir nun auch auf nichtperiodische

Funktionen auf der gesamten reellen Achse ausweiten. Dazu schauen wir uns noch einmal die Fourierreihe

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t] \quad (6.21)$$

einer auf dem Intervall $[0, T]$ definierten und periodischen Funktion $f(t)$ an, wobei wieder die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$ eingesetzt wurde. Führen wir nun wieder die Bezeichnung $\omega_n = n\omega$ ein, so wird die Differenz zweier aufeinander folgender Frequenzen gerade

$$\omega_{n+1} - \omega_n = \frac{2\pi}{T} = \Delta\omega_n. \quad (6.22)$$

Der Fourierkoeffizient a_n wird dann

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T dt f(t) \cos \omega_n t = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt f(t) \cos \omega_n t, \quad (6.23)$$

wobei wir verwendet haben, dass die Funktion $f(t)$ periodisch sein soll. Dies schreiben wir identisch um in

$$\frac{T}{2\pi} a_n = a(\omega_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} dt f(t) \cos \omega_n t. \quad (6.24)$$

Nun lassen wir das Periodizitätsintervall und damit die Integralgrenzen sehr groß werden. In dem Limes $T \rightarrow \infty$ verschwindet die Differenz benachbarter Frequenzen $\omega_{n+1} - \omega_n \rightarrow 0$ und es bleibt als Fourierkoeffizient

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \cos \omega t. \quad (6.25)$$

Eingesetzt in die Fourierreihe (6.21) ergibt das

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\pi}{T} [a(\omega_n) \cos \omega_n t + b(\omega_n) \sin \omega_n t]. \quad (6.26)$$

Nun führen wir den Grenzübergang $T \rightarrow \infty$ und damit $\Delta\omega_n \rightarrow 0$ durch und finden

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta\omega_n [a(\omega_n) \cos \omega_n t + b(\omega_n) \sin \omega_n t] \\ &= \int_0^{\infty} d\omega [a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t] . \end{aligned} \quad (6.27)$$

Nun setzen wir die Definition (6.25) ein und finden

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\tau f(\tau) [\cos \omega\tau \cos \omega t + \sin \omega\tau \sin \omega t] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\tau f(\tau) \cos \omega(\tau - t) . \end{aligned} \quad (6.28)$$

Wenn die Funktion $f(t)$ absolut integrierbar ist, was wir hier voraussetzen müssen, kann die Integrationsreihenfolge nach dem Satz von Fubini vertauscht werden und wir erhalten

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau f(\tau) \int_0^{\infty} d\omega [e^{i\omega(\tau-t)} + e^{-i\omega(\tau-t)}] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau f(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(\tau-t)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau f(\tau) e^{-i\omega\tau} . \end{aligned} \quad (6.29)$$

Das zweite Integral definiert die Fouriertransformierte $F(\omega)$ der Funktion $f(t)$. Wir erhalten also die Grundformeln der Fouriertransformation zu

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} F(\omega) \leftrightarrow F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} f(t) \quad (6.30)$$

Man beachte, dass die Vorfaktoren vor den Integralen hier asymmetrisch verteilt sind. Das ist im Prinzip reine Geschmacksfrage, man kann auch vor beide Integrale einen Faktor $1/\sqrt{2\pi}$ schreiben. Allerdings stellt sich heraus (beim Satz von Parseval), dass die symmetrische Schreibweise manchmal Vorteile besitzt.

Die Fouriertransformation ist eine **Integraltransformation**, die aus einer Funktion $f(t)$ im t -Raum eine Funktion $F(\omega)$ im ω -Raum macht. Manchmal wird für die Fouriertransformierte auch die Bezeichnung $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ und für die Rücktransformation $f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$ verwendet.

Bevor wir die allgemeinen Eigenschaften der Fouriertransformation diskutieren, betrachten wir ein wichtiges Beispiel die Transformation einer Gaußschen Funktion

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-t^2/(2\sigma^2)} \quad (6.31)$$

mit der Varianz σ^2 , die um den Koordinatenursprung zentriert ist. Ihre Fouriertransformation liefert ein Gaußsches Integral

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{\infty} dt e^{-i\omega t} e^{-t^2/(2\sigma^2)}, \quad (6.32)$$

das durch quadratische Ergänzung gelöst wird. Das Ergebnis ist

$$F(\omega) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\omega^2\sigma^2/2}, \quad (6.33)$$

also wieder eine Gaußsche Funktion, aber diesmal mit der Varianz $1/\sigma^2$. Die Breite eines Signals im Frequenzraum ist also umgekehrt proportional zur Breite des Signals im Zeitraum. Anders ausgedrückt: je kürzer ein Puls ist, desto breiter ist sein Frequenzspektrum.

Offensichtlich ist das Produkt der Varianzen σ_t^2 im Zeitraum und σ_ω^2 im Frequenzraum durch

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 = 1 \quad (6.34)$$

miteinander verbunden. Dies ist eine Art **Unschärferelation**, die uns noch häufiger in der Quantenmechanik begegnen wird. Ihre Aussage ist, dass zwei Fourier-komplementäre Signale niemals beide beliebig genau bestimmt werden können. Diese Aussage ist sogar noch allgemeiner, man kann zeigen, dass für beliebige Funktionen die Ungleichung $\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 \geq 1$ gilt. Die Gaußschen Funktionen bilden die Klasse der Funktionen mit minimaler Unschärfe.

Wir haben die Gaußsche Funktion (6.31) gerade so gewählt, dass ihr Integral über die gesamte reelle Achse

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) = 1 \quad (6.35)$$

wird. In der Grenze $\sigma \rightarrow 0$ wird diese Funktion eine beliebig schmale Funktion, die immer noch um den Koordinatenursprung zentriert ist. Wir können also formal sagen, dass

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} f(t) = \delta(t) \quad (6.36)$$

gilt. Diese Aussage ist mit Vorsicht zu betrachten, weil wir schon wissen, dass die δ -Funktion gar keine Funktion im eigentlichen Sinne ist und der Grenzwert somit gar nicht existiert (er wird in der Funktionalanalysis klarer). Die Fouriertransformierte (6.33) hingegen wird zu einer immer breiteren Funktion, die in der Grenze zu einer konstanten Funktion wird. Wir erhalten also formal die Fouriertransformierte der δ -Funktion zu

$$f(t) = \delta(t) \leftrightarrow F(\omega) = 1. \quad (6.37)$$

6.3.1 Eigenschaften der Fouriertransformation

Wir wollen hier zunächst einige einfache Eigenschaften der Fouriertransformation anführen, die sofort aus der Definition (6.30) folgen. Die Fouriertransformation ist eine lineare Operation, das heisst, dass die Fouriertransformation einer Linearkombination von Funktionen gleich der Linearkombination der jeweiligen Fouriertransformationen ist,

$$\mathcal{F}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \mathcal{F}[f(t)] + \beta \mathcal{F}[g(t)]. \quad (6.38)$$

Außerdem ist immer zu beachten, dass es sich hierbei um eine komplexwertige Operation handelt. Eine reelle Funktion im Zeitraum hat meist eine komplexwertige Fouriertransformierte. Ausnahmen gibt es nur für Funktionen mit speziellen Symmetrieeigenschaften. Ist beispielsweise $f(t)$ reell und gerade, dann ist es $F(\omega)$ ebenso. Wir finden die folgenden allgemeinen Symmetrien direkt aus der Definition:

$f(t)$	$F(\omega)$
reell	$F(-\omega) = F^*(\omega)$
imaginär	$F(-\omega) = -F^*(\omega)$
gerade	gerade
ungerade	ungerade
reell und gerade	reell und gerade
reell und ungerade	imaginär und ungerade
imaginär und gerade	imaginär und gerade
imaginär und ungerade	reell und ungerade

Desweiteren gelten die folgenden Symmetriebeziehungen: Die Fouriertransformierte einer zeitgespiegelten reellen Funktion $f(-t)$ ist das komplex konjugierte der Fouriertransformierten der ursprünglichen Funktion,

$$\mathcal{F}[f(-t)] = \mathcal{F}[f(t)]^* = F(-\omega). \quad (6.39)$$

Das heisst, dass für eine reelle Funktion $f(t)$ die Fouriertransformierte die Eigenschaft $F(-\omega) = F^*(\omega)$ besitzt. Dies ist ein Spezialfall des **Skalierungsgesetzes**, welches besagt, dass die Fouriertransformation $G(\omega)$ einer skalierten Funktion $g(t) = f(\alpha t)$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ gerade

$$G(\omega) = \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \quad (6.40)$$

ist. Diese Eigenschaft zeigt man wie folgt:

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} f(\alpha t) \stackrel{\tau=\alpha t}{=} \frac{1}{|\alpha|} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i(\omega/\alpha)\tau} f(\tau) = \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right). \quad (6.41)$$

Die nächsten Eigenschaften betreffen die **Translation** sowie die **Modulation** einer Funktion. Verschiebt man eine Funktion $g(t) = f(t - t_0)$, so wird

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} f(t - t_0) \stackrel{\tau=t-t_0}{=} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega(\tau+t_0)} f(\tau) = e^{-i\omega t_0} F(\omega) \quad (6.42)$$

Analog dazu gilt, dass eine modulierte Funktion $g(t) = e^{i\omega_0 t} f(t)$ transformiert wird zu

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i(\omega-\omega_0)t} f(t) = F(\omega - \omega_0). \quad (6.43)$$

Man erkennt, dass beide Eigenschaften in gewissem Sinne komplementär zueinander sind.

Ein weiteres komplementäres Paar von Eigenschaften erhalten wir beim Betrachten der **Fouriertransformation der Ableitung** einer Funktion. Sei also $g(t) = \frac{d}{dt}f(t)$. Dann ist

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \frac{d}{dt}f(t) = i\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} f(t) = i\omega F(\omega), \quad (6.44)$$

wobei wir partiell integriert und die Ableitung auf die Exponentialfunktion angewandt haben. Allgemeiner gilt, dass

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = (i\omega)^n \mathcal{F}[f(t)]. \quad (6.45)$$

Umgekehrt findet man die Fouriertransformierte von $g(t) = tf(t)$ zu

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} t f(t) = i \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} f(t) = i \frac{d}{d\omega} F(\omega). \quad (6.46)$$

Allgemein gilt wieder

$$\mathcal{F}[t^n f(t)] = i^n \frac{d^n}{d\omega^n} \mathcal{F}[f(t)]. \quad (6.47)$$

6.3.2 Faltungssatz der Fouriertransformation

Die Fouriertransformation zeigt eine interessante Verbindung zwischen der Faltung zweier Funktionen und deren Multiplikation auf. Wir erinnern uns, dass die Faltung zweier Funktionen $f(t)$ und $g(t)$, die beide als (lokal) integrierbar angenommen werden, als

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau f(t - \tau)g(\tau) \quad (6.48)$$

definiert ist. Deren Fouriertransformation ist aber

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau f(t - \tau)g(\tau) \quad (6.49)$$

Führt man das t -Integral mithilfe der Translationseigenschaft (6.42) aus, so erhält man

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} F(\omega)g(\tau). \quad (6.50)$$

Das verbleibende τ -Integral ist aber gerade die Fouriertransformierte von $g(t)$, so dass gilt:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau f(t-\tau)g(\tau) \leftrightarrow H(\omega) = F(\omega)G(\omega). \quad (6.51)$$

Dies ist der **Faltungssatz** der Fouriertransformation, der besagt, dass die Fouriertransformierte der Faltung zweier Funktionen gerade das Produkt der jeweiligen Fouriertransformierten ist.

Analog zur Faltung findet man die Fouriertransformation der **Kreuzkorrelation** zweier Funktionen

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau f^*(\tau)g(t+\tau) \quad (6.52)$$

zu

$$H(\omega) = F^*(\omega)G(\omega). \quad (6.53)$$

Ein Spezialfall ist die **Autokorrelation** einer Funktion $f(t)$. für die gilt:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau f^*(t)\tau f(t+\tau) \leftrightarrow H(\omega) = |F(\omega)|^2. \quad (6.54)$$

6.3.3 Satz von Parseval

Eine wichtige Beziehung zwischen zwei (quadratisch integrierbaren) Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ im Zeitraum und den dazugehörigen Funktionen im Frequenzraum liefert der Satz von Parseval. Dieses macht eine Aussage zu dem Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt f(t)g^*(t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega e^{i\omega t} F(\omega) e^{-i\Omega t} G^*(\Omega). \quad (6.55)$$

Das t -Integral liefert eine δ -Funktion $2\pi\delta(\omega - \Omega)$, mithilfe derer eines der beiden verbleibenden Frequenzintegrale ausgeführt werden kann. Das Ergebnis ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt f(t)g^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega F(\omega)G^*(\omega). \quad (6.56)$$

Ein Spezialfall ist wiederum

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt |f(t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |F(\omega)|^2. \quad (6.57)$$

Letztere Beziehung ist auch als Satz von Plancherel bekannt. Er besagt, dass die Fouriertransformierte einer normierbaren Funktion $f(t)$ wiederum eine normierbare Funktion $F(\omega)$ ist. Diese Aussage wird später in der Quantenmechanik besonders wichtig. Im Falle symmetrischer Aufteilung des Faktors 2π wird die Fouriertransformation sogar eine unitäre Transformation, die die Norm einer Funktion erhält.

6.4 Lösung von Differentialgleichungen mittels Fouriertransformation

Neben der Berechnung von Spektren und Korrelationsfunktion von Signalen und Zeitreihen wird die Fouriertransformation vor allem zur Lösung von Differentialgleichungen eingesetzt. Dazu wird die Eigenschaft (6.45) ausgenutzt, die besagt, dass Ableitungen einer Funktion bei Fouriertransformation in einfache Multiplikationen übergehen. Als Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung erster Ordnung (5.103)

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = f(t). \quad (6.58)$$

Wir setzen nun die Fouriertransformierte $Y(\omega)$ der Funktion $y(t)$ ein und finden unter Zuhilfenahme der Beziehung

$$\mathcal{F} \left[\frac{dy(t)}{dt} \right] = i\omega \mathcal{F}[y(t)] \quad (6.59)$$

die einfache algebraische Gleichung

$$i\omega Y(\omega) + aY(\omega) = F(\omega), \quad (6.60)$$

wobei wir die rechte Seite ebenfalls transformiert haben. Deren Lösung ist offensichtlich

$$Y(\omega) = \frac{F(\omega)}{i\omega + a}, \quad (6.61)$$

die nun wieder in den Ursprungsraum zurücktransformiert werden muss. Das heisst, die Lösung der Gleichung (6.58) ist also formal

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} \frac{F(\omega)}{i\omega + a}. \quad (6.62)$$

Das resultierende Integral kann nun mithilfe des Residuensatzes gelöst werden, wenn die Funktion $F(\omega)$ geeignete Eigenschaften besitzt, speziell, dass $F(\omega)$ keine Pole oder Nullstellen in der oberen Hälfte der komplexen ω -Ebene besitzt. Der Nenner des Integranden hat einen Pol bei $\omega = ia$, also auf der positiven imaginären Achse in der komplexen ω -Ebene. Um den Residuensatz anwenden zu können, schließen wir die Integrationskontour in der oberen Halbebene, deren Beitrag aber durch den exponentiellen Abfall der Exponentialfunktion $e^{i\omega t}$ mit $\text{Im } \omega > 0$ verschwindet. Der Residuensatz nimmt dann die Form

$$\oint d\omega \frac{f(\omega)}{\omega - \omega_0} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{f(\omega)}{\omega - \omega_0} = 2\pi i f(\omega_0) \quad (6.63)$$

an, wobei $f(\omega) = -ie^{i\omega t} F(\omega)$ und $\omega_0 = ia$ zu setzen ist.

Die Exponentialfunktion verschwindet allerdings nur für $t > 0$, was zusätzlich gefordert werden muss. Das ist äquivalent dazu, eine Sprungfunktion $\Theta(t)$ bei der Rücktransformation einzuführen, um Konvergenz zu garantieren. Damit wird

$$y(t) = e^{-at} F(ia) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \Theta(t - \tau) e^{-a(t-\tau)} f(\tau). \quad (6.64)$$

Das letzte Integral ist aber nichts anderes als die Faltung $\Theta(t)e^{-at} \star f(t)$, wobei $E(t) = \Theta(t)e^{-at}$ nichts anderes ist als die Fundamentallösung der inhomogenen Differentialgleichung.

6.4.1 Gedämpfter harmonischer Oszillator

Als weiteres Rechenbeispiel wollen wir uns noch einmal die Lösung des getriebenen harmonischen Oszillators mit Dämpfung ansehen. Die Differentialgleichung lautet hierfür

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \gamma \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = f(t). \quad (6.65)$$

Transformiert in den Fourierraum lautet die Gleichung

$$-\omega^2 X(\omega) + i\omega\gamma X(\omega) + \omega_0^2 X(\omega) = F(\omega) \quad (6.66)$$

mit der Lösung

$$X(\omega) = \frac{F(\omega)}{-\omega^2 + i\omega\gamma + \omega_0^2}. \quad (6.67)$$

Man beachte, dass der Nenner nichts anderes ist als das charakteristische Polynom der Differentialgleichung (6.65), wenn wir den Exponentialansatz $x(t) = e^{i\omega t}$ machen. An dieser Stelle wird auch die Verbindung zwischen dem Exponentialansatz und der Fouriertransformation klar.

Selbstverständlich kann man auch hier den Residuensatz anwenden, nachdem man mithilfe einer Partialbruchzerlegung das charakteristische Polynom auf eine einfachere Form gebracht haben. Für eine periodische treibende Kraft muss selbst das nicht getan werden. Sei

$$f(t) = a \cos \Omega t = \frac{a}{2} [e^{i\Omega t} + e^{-\Omega t}] \quad (6.68)$$

wie zuvor. Die Fouriertransformierte davon ist

$$F(\omega) = \pi a [\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)], \quad (6.69)$$

wobei wir die Modulationseigenschaft der Fouriertransformation und die Tatsache, dass $\mathcal{F}[1(t)] = 2\pi\delta(\omega)$ ist, verwendet. Die Rücktransformation liefert dann

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\delta(\omega + \Omega) + \delta(\omega - \Omega)}{-\omega^2 + i\omega\gamma + \omega_0^2} e^{i\omega t} \\ &= \frac{a}{2} \left[\frac{e^{-i\Omega t}}{\omega_0^2 - \Omega^2 - i\gamma\Omega} + \frac{e^{i\Omega t}}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i\gamma\Omega} \right], \end{aligned} \quad (6.70)$$

wobei wir die Relation

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \delta(\omega) F(\omega) = F(0) \quad (6.71)$$

verwendet haben. Das heisst, die δ -Funktion pickt sich den Punkt der Funktion $F(\omega)$ heraus, an dem ihr Argument verschwindet.

Man beachte, dass zur vollständigen Lösung der Differentialgleichung (6.65) natürlich noch die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung zählt. Diese hatten wir in (5.64) schon berechnet und gefunden, dass diese exponentiell gedämpft sind. Nach diesem sogenannten Einschwingvorgang bleibt also nur noch die partikuläre Lösung übrig, die die schon gefundenen Resonanzen aufweist. In unserem Fall mit nichtverschwindender Dämpfung $\gamma > 0$ gibt es nun aber keine divergierenden Resonanzen mehr, sondern die Amplitude ist begrenzt. Für schwache Dämpfung γ ist $\Omega = \omega_0$ immer noch die Resonanzbedingung, und für die Auslenkung bei Resonanz gilt

$$x_{\text{res}}(t) = \frac{a}{2} \left[\frac{e^{-i\omega_0 t}}{-i\gamma\omega_0} + \frac{e^{i\omega_0 t}}{i\gamma\omega_0} \right] = \frac{a}{\gamma\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (6.72)$$

6.4.2 Lösung partieller Differentialgleichungen

Die Methode der Fouriertransformation lässt sich auch für wichtige Klassen von partiellen Differentialgleichungen anwenden. So ist beispielsweise die Diffusionsgleichung eines Teilchens

$$\frac{\partial}{\partial t} E(\mathbf{x}, t) - a^2 \Delta E(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x}, t). \quad (6.73)$$

Wir werden uns hier zunächst auf die Fundamentallösung konzentrieren. Alle anderen treibenden Kräfte können wie immer über eine Faltung eingebaut werden. Es sei zu bemerken, dass Gleichung (6.73) auch als eine Schrödingergleichung für reelle Zeiten verstanden werden kann. Die Gleichung kann durch Fouriertransformation bezüglich der Koordinate \mathbf{x} in eine gewöhnliche Differentialgleichung bezüglich t überführt werden.

Betrachten wir zuerst die Fouriertransformation bezüglich \mathbf{x} . Dazu muss die bisher eindimensionale Transformation zu einer dreidimensionalen Transformation verallgemeinert werden. Das geschieht, indem jede (kartesische)

Koordinate einzeln transformiert wird. Sei $f(x)$ eine Funktion einer kartesischen Koordinate x , dann ist ihre Fouriertransformierte

$$F(k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ik_x x} f(x). \quad (6.74)$$

Die Verallgemeinerung für Funktionen der Koordinaten $\mathbf{x} = (x, y, z)$ ist dann mit $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$

$$F(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ik_x x} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-ik_y y} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-ik_z z} f(\mathbf{x}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x}). \quad (6.75)$$

Mithilfe von (6.75) kann nun Gleichung (6.73) vereinfacht werden. Dazu definieren wir die Funktion $\tilde{E}(\mathbf{k}, t)$ als die nach der Variablen \mathbf{x} partiell Fouriertransformierte der Fundamentallösung $E(\mathbf{x}, t)$ zu

$$\tilde{E}(\mathbf{k}, t) = \mathcal{F}_{\mathbf{x}} [E(\mathbf{x}, t)] = \iiint_{-\infty}^{\infty} d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} E(\mathbf{x}, t). \quad (6.76)$$

Die einzelnen Terme in der Differentialgleichung (6.73) transformieren sich wie folgt:

$$\mathcal{F}_{\mathbf{x}} \left[\frac{\partial}{\partial t} E(\mathbf{x}, t) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}_{\mathbf{x}} [E(\mathbf{x}, t)] = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{E}(\mathbf{k}, t), \quad (6.77)$$

$$\mathcal{F}_{\mathbf{x}} [\delta(\mathbf{x}, t)] = \mathcal{F}_{\mathbf{x}} [\delta(\mathbf{x})\delta(t)] = 1(\mathbf{k})\delta(t), \quad (6.78)$$

$$\mathcal{F}_{\mathbf{x}} [\Delta E(\mathbf{x}, t)] = -|\mathbf{k}|^2 \mathcal{F}_{\mathbf{x}} [E(\mathbf{x}, t)] = -|\mathbf{k}|^2 \tilde{E}(\mathbf{k}, t). \quad (6.79)$$

Nach Einsetzen dieser Terme in die Gleichung (6.73) finden wir nunmehr eine gewöhnliche Differentialgleichung für die (partiell) Fouriertransformierte $\tilde{E}(\mathbf{k}, t)$ zu

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{E}(\mathbf{k}, t) + a^2 |\mathbf{k}|^2 \tilde{E}(\mathbf{k}, t) = 1(\mathbf{k})\delta(t). \quad (6.80)$$

Die Fundamentallösung dieser Gleichung ist, wie schon mehrfach berechnet,

$$\tilde{E}(\mathbf{k}, t) = \Theta(t) e^{-a^2 |\mathbf{k}|^2 t}. \quad (6.81)$$

Was bleibt, ist die Rücktransformation dieser Funktion bezüglich \mathbf{k} ,

$$E(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{E}(\mathbf{k}, t) = \frac{\Theta(t)}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-a^2 |\mathbf{k}|^2 t}. \quad (6.82)$$

Das letzte Integral ist ein dreidimensionales Gaußsches Integral, das wir durch quadratische Ergänzung lösen können mit dem Ergebnis, dass

$$E(\mathbf{x}, t) = \frac{\Theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4a^2 t}\right). \quad (6.83)$$

Diese Fundamentallösung ist also eine Gaußsche Funktion, die mit zunehmender Zeit t immer breiter und flacher wird. Das heisst, dass die Lösung mit fortschreitender Zeit zerläuft bzw. diffundiert.

6.4.3 Fundamentallösung der skalaren Helmholtzgleichung

Als letztes Beispiel betrachten wir eine Gleichung aus der Elektrodynamik. Aus den Maxwellgleichungen kann man eine Wellengleichung für die Komponenten des Vektorpotentials herleiten. Diese sogenannte Helmholtzgleichung hat die Form

$$(\Delta + a^2)E(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}). \quad (6.84)$$

Es handelt sich also wieder um eine partielle Differentialgleichung, die wir mithilfe der Fouriertransformation lösen wollen. Wir finden sofort, dass

$$(-|\mathbf{k}|^2 + a^2)\tilde{E}(\mathbf{k}) = 1 \quad (6.85)$$

und damit

$$\tilde{E}(\mathbf{k}) = \frac{1}{-|\mathbf{k}|^2 + a^2}. \quad (6.86)$$

Die inverse Fouriertransformation führt man am besten in Kugelkoordinaten (k, Θ, φ) durch. Damit ergibt sich

$$E(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} d^3k \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{a^2 - |\mathbf{k}|^2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\Omega \int_0^{\infty} k^2 dk \frac{e^{ik|\mathbf{x}|\cos\Theta}}{a^2 - k^2}, \quad (6.87)$$

wobei wir $\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} = k|\mathbf{x}|\cos\Theta$ gesetzt haben und mit $d\Omega$ das Raumwinkelelement $\sin\Theta d\Theta d\varphi$ bezeichnen. Wir führen zuerst die Winkelintegration durch und finden

$$\int d\Omega e^{ik|\mathbf{x}|\cos\Theta} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d(\cos\Theta) e^{ik|\mathbf{x}|\cos\Theta} = \frac{2\pi}{ik|\mathbf{x}|} (e^{ik|\mathbf{x}|} - e^{-ik|\mathbf{x}|}). \quad (6.88)$$

Damit bleibt

$$E(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2 i |\mathbf{x}|} \int_0^{\infty} k dk \frac{e^{ik|\mathbf{x}|} - e^{-ik|\mathbf{x}|}}{a^2 - k^2}, \quad (6.89)$$

was wir wieder mit Kontourintegration lösen werden. Dazu dehnen wir die Integrationsgrenzen auf die negative Halbachse aus, indem wir die Symmetrieeigenschaften des Integranden verwenden. Der Integrand ist insgesamt eine gerade Funktion von k , so dass gilt

$$\begin{aligned} E(\mathbf{x}) &= \frac{1}{8\pi^2 i |\mathbf{x}|} \int_{-\infty}^{\infty} k dk \frac{e^{ik|\mathbf{x}|} - e^{-ik|\mathbf{x}|}}{a^2 - k^2} \\ &= \frac{i}{16\pi^2 a |\mathbf{x}|} \int_{-\infty}^{\infty} k dk \left(\frac{1}{k - a} - \frac{1}{k + a} \right) (e^{ik|\mathbf{x}|} - e^{-ik|\mathbf{x}|}). \end{aligned} \quad (6.90)$$

Verschieben wir die Pole bei $k = a$ bzw. $k = -a$ ein klein wenig in die obere bzw. untere Halbebene, so kann die Integrationskontour geschlossen werden. Dabei gibt der Term $e^{ik|\mathbf{x}|}$ nur einen Beitrag bei $x = a$ (Kontour in der oberen Halbebene) und der Term $e^{-ik|\mathbf{x}|}$ nur einen Beitrag bei $x = -a$ (Kontour in der unteren Halbebene). Damit bleiben die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} k dk \frac{e^{ik|\mathbf{x}|}}{x - a} = 2\pi i a e^{ia|\mathbf{x}|} = - \int_{-\infty}^{\infty} k dk \frac{e^{-ik|\mathbf{x}|}}{x + a}. \quad (6.91)$$

Schlussendlich finden wir die Fundamentallösung der Helmholtzgleichung zu

$$E(\mathbf{x}) = -\frac{e^{ia|\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{x}|}. \quad (6.92)$$

Eine Verschiebung der Pole in die jeweils entgegengesetzte Richtungen liefert dann eine zweite Lösung $E(\mathbf{x}) = -e^{-ia|\mathbf{x}|}/(4\pi|\mathbf{x}|)$.

Diese Beispiele sollen zeigen, wie vielseitig einsetzbar die Fouriertransformation ist. Zum einen ist sie für Experimentatoren wichtig, da durch sie das Konzept eines Spektrums erst Sinn bekommt. Zum anderen haben wir gesehen, dass es hilfreiches Werkzeug zur Lösung linearer Differentialgleichungen ist.