Kapitel 5

Differentialgleichungen

5.1 Einführung

Eine Vielzahl physikalischer Phänomene wird durch eine Funktion beschrieben, deren Wert an einem vorgegebenen Punkt von ihren Werten an benachbarten Punkten abhängt. Das heisst, dass die Gleichung, die diese Funktion beschreibt, von den Ableitungen dieser Funktion abhängen muss. Beispielsweise beschreibt die erste Ableitung die Steigung einer Kurve oder die Geschwindigkeit, die zweite Ableitung die Krümmung einer Kurve oder die Beschleunigung. Solche Gleichungen, die eine Verknüpfung zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen beschreibt, heisst **Differentialgleichung**. Als Beispiel sei die folgende Gleichung gegeben, die uns noch häufiger begegnen wird:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0.$$

Man unterscheidet verschiedene Typen von Differentialgleichungen. Eine Differentialgleichung, in der nur gewöhnliche Ableitungen einer Funktion einer einzigen Variablen vorkommen, heisst **gewöhnliche Differentialgleichung**. Eine Differentialgleichung einer Funktion mehrerer unabhängiger Variabler, die *partielle* Ableitungen enthält, heisst **partielle Differentialgleichung**. In dieser Vorlesung werden wir uns nur mit gewöhnlichen Differentialgleichungen befassen.

Eine gewöhnliche Differentialgleichung einer Funktion y einer einzigen Variablen x ist also eine funktionale Beziehung zwischen x, y und den Ableitungen von y. Die **Ordnung** einer Differentialgleichung ist die Ordnung der höchsten Ableitung von y, die in der Gleichung auftritt. Wir werden uns im Folgenden ausschließlich mit Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung befassen.

Die allgemeine Form einer Differentialgleichung n-ter Ordnung ist

$$F\left[x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right] = 0. \tag{5.1}$$

Wenn eine Differentialgleichung in dieser Form gegeben ist, so nennt man sie **implizite Differentialgleichung**. Ist die Funktion F ein Polynom in der höchsten Ableitung $y^{(n)}$, dann wird unter dem **Grad** der Differentialgleichung der Grad dieses Polynoms verstanden. Eine Differentialgleichung heisst **linear**, wenn F ersten Grades in y und allen Ableitungen von y ist. Demzufolge ist die allgemeine Form einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x), \tag{5.2}$$

wobei $f(x)$ und die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ bekannte Grössen sind. Im einfachsten Fall sind die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ reelle (oder komplexe) Zahlen, im allgemeinen können sie aber selbst noch von der Variablen x abhängen. Ist die Funktion $f(x) = 0$, so spricht man von einer **homogenen Differentialgleichung**, ansonsten von einer **inhomogenen Differentialgleichung**.

5.2 Differentialgleichungen erster Ordnung

Wir beginnen unsere Diskussion mit der Lösung linearer Differentialgleichungen erster Ordnung, also solchen, die sich auf die Form

$$a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x) \tag{5.3}$$

bringen lassen.

5.2.1 Beispiel 1: Radioaktiver Zerfall

Als einfaches Beispiel schauen wir uns den Prozess des Zerfalls eines radioaktiven Elements an. Zu einer gegebenen Zeit t sei eine Menge $M(t)$ von radioaktivem Material vorhanden. Dieses Material zerfällt mit einer konstanten Rate γ proportional zu der aktuell vorhandenen Menge $M(t)$. Die Differentialgleichung, die diesen Prozess beschreibt, hat also die Form

$$\frac{dM}{dt} = -\gamma M, \tag{5.4}$$

wobei das Minuszeichen andeuten soll, dass die Menge an radioaktivem Material mit der Zeit abnimmt. Wir werden zwei unterschiedliche Methoden verwenden, um die Gleichung (5.4) zu lösen.

Methode 1: Versuchslösung durch Exponentialansatz

Wir versuchen zunächst, die Gleichung (5.4) durch einen Lösungsansatz der Form

$$M(t) = e^{\lambda t} \tag{5.5}$$

zu lösen. Die Wahl dieses Ansatzes wird motiviert durch die Eigenschaft der Exponentialfunktion

$$\frac{d^m e^{\lambda t}}{dt^m} = \lambda^m e^{\lambda t}, \tag{5.6}$$

die für alle positive m gilt. Setzt man diesen Lösungsansatz in die Differentialgleichung (5.4) ein, so erhält man

$$\frac{dM}{dt} = \lambda e^{\lambda t} = -\gamma e^{\lambda t} \quad \text{oder} \quad (\lambda + \gamma) e^{\lambda t} = 0. \tag{5.7}$$

Da für endliche Zeiten die Exponentialfunktion niemals verschwindet, muss

$$\lambda = -\gamma \tag{5.8}$$

gelten. Die allgemeinste Lösung, die wir für die Differentialgleichung (5.4) finden können, ist also

$$M(t) = c e^{-\gamma t}, \tag{5.9}$$

wobei c eine beliebige Konstante ist. Wir ermitteln diese Konstante durch die Anfangsbedingung, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ die Menge des radioaktiven Materials gerade $M(0) = M_0$ betrug. Damit folgt sofort, dass die Menge radioaktiven Materials zum Zeitpunkt t durch

$$\boxed{M(t) = M_0 e^{-\gamma t}} \tag{5.10}$$

gegeben ist. In Abbildung 5.1 ist die Lösung für verschiedene Werte der Zerfallskonstanten γ dargestellt. Man erkennt den typischen Verlauf der Exponentialfunktion und den schnelleren Abfall der Funktion für steigende Zerfallsraten γ.

Dieses Beispiel zeigt, dass eine eindeutige Lösung einer Differentialgleichung nicht allein durch das Lösen der Gleichung selbst erreicht wird, sondern erst durch die Vorgabe von **Anfangsbedingungen**. Offensichtlich ist die Anzahl der benötigten Anfangsbedingungen gerade gleich der Ordnung der Differentialgleichung.

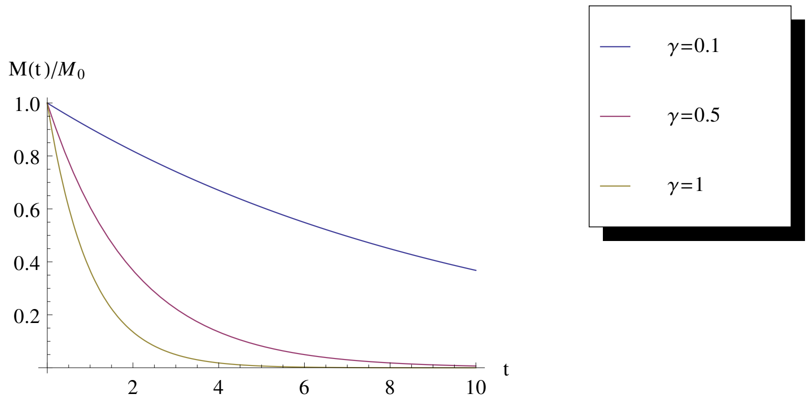

Abbildung 5.1: Die Lösung (5.10) für das Verhältnis $M(t)/M_0$ für die Zerfallsraten $\gamma = 0.1$, $\gamma = 0.5$ und $\gamma = 1$.

Methode 2: Trennung der Variablen

Die zweite Methode, die wir uns ansehen wollen, ist die Trennung der Variablen. Obwohl diese Methode recht einfach umzusetzen ist, müssen einige Zwischenschritte etwas genauer untersucht werden (obgleich ohne Beweis). Nehmen wir an, wir kennen die Menge M zu einer Zeit t. Dann können wir die Menge M zu einer späteren Zeit $t + \Delta t$ durch eine Taylorentwicklung abschätzen als

$$M(t + \Delta t) = M(t) + \frac{dM}{dt}\Delta t = M(t) - \gamma M(t)\Delta t, \tag{5.11}$$

wobei wir im zweiten Schritt die Differentialgleichung (5.4) verwendet haben. Diese Gleichung lässt sich weiter schreiben als

$$\frac{M(t + \Delta t) - M(t)}{M(t)} = -\gamma \Delta t. \tag{5.12}$$

Diese Gleichung gilt für alle Zeiten t und wird insbesondere immer genauer, je kleiner Δt gewählt wird.

Nehmen wir an, wir wollten die Lösung der Differentialgleichung (5.4) von einer Anfangszeit $t_0 = 0$ bis zu einer gewissen endlichen Zeit t bestimmen. Wir teilen dieses Zeitintervall in N gleiche Zeitintervalle $\Delta t_N = t/N$ auf, so dass der n-te Zeitschritt $t_n = n\Delta t_N$ mit $t_0 = 0$ und $t_N = t$ lautet. Für jeden Zeitschritt n kann also Gleichung (5.12) als

$$\frac{M(t_{n+1}) - M(t_n)}{M(t_n)} = -\gamma \Delta t \tag{5.13}$$

geschrieben werden. Wir summieren nun beide Seiten über alle n,

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{M(t_{n+1}) - M(t_n)}{M(t_n)} = -\gamma \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t, \tag{5.14}$$

wobei wir sehen, dass beide Seiten Riemannsche Summen darstellen. Bei kleiner werdendem Δt, d.h. bei größerer Anzahl N der Zeitintervalle, verbessert sich die Näherung der Integrale immer mehr, und im Limes $N \to \infty$ können wir

$$\int\limits_{M(0)}^{M(t)} \frac{dM'}{M'} = -\gamma \int\limits_{0}^{t} dt' \tag{5.15}$$

schreiben, wobei der Strich an den Variablen andeuten soll, dass es sich hierbei nur um Integrationsvariablen handelt und nicht um die Integrationsgrenzen. Offensichtlich treten in Gleichung (5.15) beide Variablen auf beiden Seiten getrennt auf. Die Gleichung wird nun integriert zu

$$\ln M' \Big|_{M(0)=M_0}^{M(t)} = \ln \frac{M(t)}{M_0} = -\gamma t \quad \Rightarrow M(t) = M_0 e^{-\gamma t}, \tag{5.16}$$

was exakt dieselbe Lösung von (5.4) ist, die wir auch schon über den Exponentialansatz gefunden haben.

Was zunächst einigermassen beschwerlich aussieht, lässt sich natürlich auch einfacher herleiten, allerdings nicht ganz mathematisch exakt. Dazu schreiben wir die Differentialgleichung (5.4) um als

$$\frac{dM}{M} = -\gamma dt. \tag{5.17}$$

Offensichtlich ist Gleichung (5.15) die diskrete Version der Gleichung (5.17). In diesem Fall interpretieren wir das Symbol dM/dt als den Bruch zweier Zahlen dM und dt und nicht als Differentialoperator der Funktion M. Diese nicht ganz saubere Interpretation gilt nur für Zwischenschritte innerhalb der Integration von $t = 0$ bis zu einer späteren Zeit t.

Der Vorteil der Methode der Trennung der Variablen ist ihre einfache Handhabung. Es ist normalerweise sehr einfach möglich zu erkennen, ob eine gegebene Differentialgleichung einfach trennbar ist. Ihr Nachteil besteht darin, dass sie ausschließlich für Differentialgleichungen erster Ordnung (allerdings auch für nichtlineare Gleichungen) angewandt werden kann. Der Exponentialansatz funktioniert ebenfalls für Differentialgleichungen höherer Ordnung, allerdings immer nur für lineare Gleichungen.

5.2.2 Beispiel 2: Ausbreitung von Epidemien

Als weiteres Beispiel für eine Differentialgleichung erster Ordnung wollen wir uns ein Modell für die Ausbreitung von Epidemien ansehen, das zum ersten Mal in Jahre 1760 von Daniel Bernoulli für die Modellierung der Ausbreitung von Pocken benutzt wurde. Im Prinzip funktioniert die gesamte Epidemiologie nach demselben Muster: aus Annahmen und einigen wenigen bekannten Charakteristiken wird ein Modell gebildet, dann gelöst und aus den Ergebnissen durch Variation von Anfangsbedingungen verschiedene Szenarien getestet, die dann zu möglichen Strategien zur Bekämpfung der Epidemie führen. Modellbildung und Lösung von Differentialgleichungen wird heutzutage ebenso von Sicherheitsorganisationen für die Risikoabschätzung für die Ausbreitung von Kernwaffen wie *dirty bombs* unter Terroristen verwendet.

Für unser epidemiologisches Modell teilen wir die Bevölkerung in zwei Gruppen auf: diejenigen, die die Infektionskrankheit noch nicht besitzt und infiziert werden können (Anteil x an der Gesamtbevölkerung) und diejenigen, die die Krankheit schon besitzen und andere infizieren können (Anteil y and der Gesamtbevölkerung). Wir nehmen an, dass jederman zu genau einer der beiden Gruppen gehört und damit $x + y = 1$ gilt. Wir stellen nun drei Annahmen auf, wie sich die Infektion ausbreitet:

1. The Infektion breitet sich nur durch direkten Kontakt zwischen infizieren und nicht infizieren Personen aus (z.B. in Menschanansammlungen etc.).

2. Der Anteil der infizierten Personen erhöht sich mit einer Rate γ proportional zu der Anzahl solcher Kontakte.

3. Beide Bevölkerungsgruppen können sich frei untereinander bewegen, sie sind also unkorreliert. Damit ist die Anzahl der Kontakte gerade gleich xy.

Die aus diesen drei Annahmen resultierende Differentialgleichung lautet

$$\frac{dy}{dt} = \gamma x y = \gamma(1-y)y, \tag{5.18}$$

wobei wir im zweiten Schritt benutzt haben, dass $x+y=1$ gilt. Als Anfangsbedingung geben wir den Anteil der infizieren Bevölkerung $y(0) = y_0$ vor. Offensichtlich ist die Differentialgleichung (5.18) nichtlinear und wir können den Exponentialansatz nicht verwenden. Das heisst, wir benutzen die Methode der Trennung der Variablen und schreiben

$$\frac{dy}{y(1-y)} = \gamma\, dt. \tag{5.19}$$

Integrieren wir nun auf beiden Seiten, so erhalten wir

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{dy'}{y'(1-y')} = \gamma \int_0^t dt' \quad \Rightarrow \ln \frac{y'}{1-y'}\Big|_{y_0}^{y(t)} = \gamma t. \tag{5.20}$$

Wir lösen nun die Gleichung nach $y(t)$ auf und erhalten

$$\boxed{y(t) = \frac{y_0 e^{\gamma t}}{1 - y_0(1-e^{\gamma t})}}. \tag{5.21}$$

Das Verhalten der Lösung (5.21) ist in Abbildung 5.2 dargestellt. Wir sehen sowohl an der Lösung (5.21) als auch an dem Graphen, dass für alle $y_0 > 0$, also selbst für einen beliebig kleinen Anteil der anfänglich infizierten Bevölkerung, eventuell die gesamte Bevölkerung infiziert wird, also $y(t \to \infty) \to 1$. Der Punkt $y = 1$ ist demzufolge **stabil** und der Punkt $y = 0$ **instabil**. Mit der genauen Definition von Stabilität werden wir uns im folgenden Kapitel auseinandersetzen.

5.2.3 Nichtlinearitäten und Stabilitätsanalyse

Wir haben in unserem kleinen Beispiel gesehen, dass bei nichtlinearen Differentialgleichungen verschiedene Anfangswerte zu unterschiedlichem Lösungsverhalten führen kann. Wir wollen uns diesem Phänomen etwas näher zuwenden. Wir beginnen mit einer Differentialgleichung erster Ordnung in der Form

$$\frac{dy}{dx} = f(y, \lambda), \tag{5.22}$$

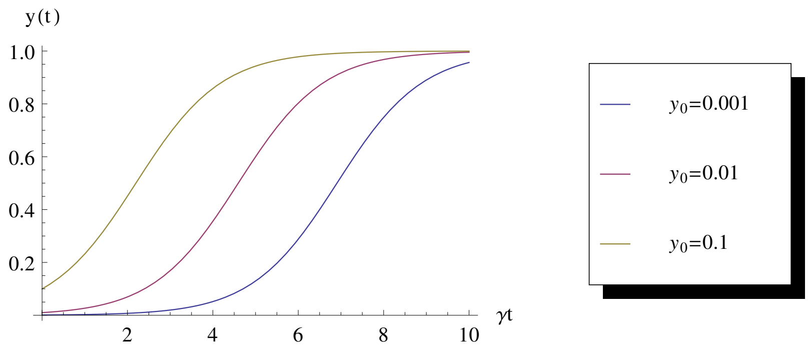

Abbildung 5.2: Anteil der infizierten Personen $y(t)$ bei verschiedenen Anfangswerten $y(0) = y_0$.

wobei λ ein reeller Parameter ist. Ein **Fixpunkt** dieser Differentialgleichung ist eine solche Lösung $\tilde{y}(x)$, für die $d\tilde{y}/dx = 0$ für alle x gilt, demzufolge ist $f(\tilde{y}, \lambda) = 0$. Wir schauen uns nun an, was passiert, wenn wir ein kleines Stück Δy von einem solchen Fixpunkt weggehen. Wir erhalten

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\tilde{y}}{dx} + \frac{d(\Delta y)}{dx} = \frac{d(\Delta y)}{dx} = f(\tilde{y} + \Delta y, \lambda). \tag{5.23}$$

Entwickeln wir die Funktion $f(y, \lambda)$ in eine Taylorreihe um den Punkt $\tilde{y}$, so folgt für die Entwicklung der Störung Δy

$$\frac{d(\Delta y)}{dx} = \left.\frac{df(y,\lambda)}{dx}\right|_{y=\tilde{y}} \Delta y := f_y(\tilde{y}, \lambda)\Delta y. \tag{5.24}$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung, die wir schon einmal gelöst haben. Die Störung verhält sich also wie

$$\Delta y(x) = \Delta y(0) e^{f_y(\tilde{y},\lambda)x}. \tag{5.25}$$

Das heisst, sobald der Realteil der Ableitung der Funktion f negativ ist, wird eine anfängliche Störung allmählich abklingen, die Lösung heisst **stabil**. Ist hingegen der Realteil der Ableitung der Funktion f positiv im Punkt $\tilde{y}$, so wächst selbst eine noch so kleine Störung exponentiell an, die Lösung $\tilde{y}$ ist also **instabil**.

In unserem Beispiel (5.18) ist die Funktion $f(y) = y(1-y)$. Die Fixpunkte sind offensichtlich $\tilde{y}_1 = 0$ und $\tilde{y}_2 = 1$. Die Ableitungen der Funktion an den beiden Fixpunkten sind $f_y(\tilde{y}_1 = 0) = 1$ und $f_y(\tilde{y}_2 = 1) = -1$. Damit ist, wie wir schon durch explizites Lösen der Gleichung (5.18) gesehen haben, der Fixpunkt $\tilde{y}_1 = 0$ instabil, der Fixpunkt $\tilde{y}_2 = 1$ aber stabil.

Wenn die Funktion f noch von einem Parameter λ abhängt, so hängt das Stabilitäsverhalten der Fixpunkte auch noch von λ ab. Eine qualitative Änderung des Lösungsverhaltens einer Differentialgleichung nennt man **Bifurkation**.

Sattelpunktsbifurkation

Sei nun unsere Differentialgleichung vom quadratischen Typ,

$$\frac{dy}{dx} = \lambda + y^2. \tag{5.26}$$

Die Fixpunkte dieser Gleichung hängen von dem (reellen) Parameter λ ab. Dieser wird auch **Bifurkationsparameter** genannt. Die Ableitung der Funktion f ist $f_y(y, \lambda) = 2y$. Damit erhalten wir folgendes Verhalten:

- $\lambda < 0$: Fixpunkte bei $\tilde{y} = \sqrt{|\lambda|}$ (instabil) und $\tilde{y} = -\sqrt{|\lambda|}$ (stabil)
- $\lambda = 0$: nur ein Fixpunkt bei $\tilde{y} = 0$, weder stabil noch instabil, Bifurkationspunkt
- $\lambda > 0$: keine Fixpunkte

Das Verhalten der Fixpunkte ist in dem Bifurkationsdiagramm 5.3 dargestellt. Dies ist ein Beispiel für eine **Sattelpunktsbifurkation**.

Pitchforkbifurkation

Als nächstes betrachten wir eine nichtlineare Differentialgleichung vom kubischen Typ,

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y - y^3. \tag{5.27}$$

Die Fixpunkte können wie folgt charakterisiert werden:

- $\lambda < 0$: ein stabiler Fixpunkt bei $\tilde{y} = 0$
- $\lambda = 0$: nur ein Fixpunkt bei $\tilde{y} = 0$, weder stabil noch instabil, Bifurkationspunkt

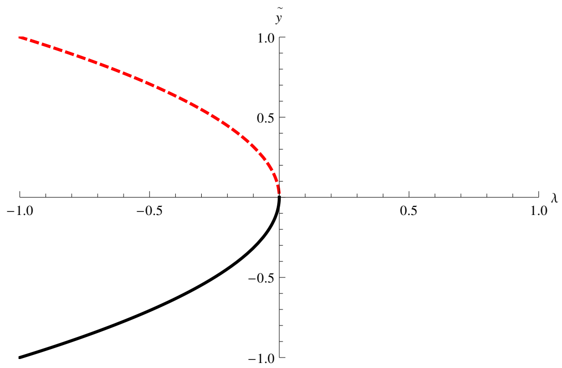

Abbildung 5.3: Bifurkationsdiagramm für die Gleichung (5.26).

- $\lambda > 0$: zwei stabile Fixpunkte bei $\tilde{y} = \pm\sqrt{\lambda}$ und ein instabiler Fixpunkt bei $\tilde{y} = 0$

Das Verhalten dieser sogenannten **Pitchfork-** oder **Heugabelbifurkation** ist in Abbildung 5.4 dargestellt.

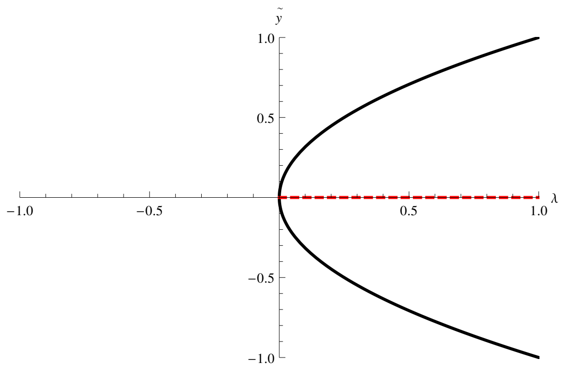

Abbildung 5.4: Bifurkationsdiagramm für die Gleichung (5.27).

Transkritische Bifurkation

Die **transkritische Bifurkation** wird durch die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = ry(1-y) - py \tag{5.28}$$

beschrieben, die für $p = 0$ und $r = \lambda$ in die Gleichung (5.18) übergeht. Die Gleichung (5.28) wird zur Modellierung des Erzeuger-Verbraucher-Problems in der Ökonomie verwendet. In diesem Fall wird mit der Variablen y die zur Verfügung stehenden Resourcen bezeichnet, r ist die Wachstumsrate (die sowohl positiv als auch negativ sein kann), und py ist der Verbrauch proportional zu den vorhandenen Resourcen. Die Fixpunkte sind $\tilde{y} = 0$ (stabil für $r - p < 0$) und $\tilde{y} = 1 - p/r$ (stabil für $r - p > 0$). Die Bifurkation tritt bei $r = p$ auf.

Die Interpretation dieser Lösungen ist anschaulich: wenn der Verbrauch p grösser ist als die Produktion r, fallen die Resourcen auf Null ab. Im ungekehrten Fall pegeln sich die Resourcen bei einem von Null verschiedenen Wert ein, der vom Verhältnis von Wachstumsrate und Verbrauch abhängt.

5.2.4 Inhomogene Differentialgleichungen

Wir kehren nun zurück zu den linearen Differentialgleichungen erster Ordnung in der Form (5.3) und schreiben sie in der Form

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = f(x). \tag{5.29}$$

Sowohl der Koeffizient $a(x)$ als auch die Funktion $f(x)$ hängen dabei von der Variablen x ab. Für diese allgemeine Differentialgleichung kann keine der beiden bisher verwendeten Methoden direkt angewandt werden. Das Vorhandensein der Funktion $f(x)$ macht Gleichung (5.29) zu einer **inhomogenen** Differentialgleichung. Nehmen wir an, wir hätten zwei unabhängige Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ gefunden. Die Differenz beider Lösungen $y_1(x) - y_2(x)$ ist dann offensichtlich eine Lösung der homogenen Gleichung $d(y_1 - y_2)/dx + a(x)(y_1 - y_2) = 0$. Wir bezeichnen die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung mit $y_{\text{hom}}(x)$. Das bedeutet, dass die beiden Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ durch die Lösung $y_{\text{hom}}(x)$ über

$$y_2(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_1(x) \tag{5.30}$$

verknüpft sein müssen. Die allgemeine Lösungsmethode für inhomogene Differentialgleichungen besteht nun darin, irgendwie eine **partikuläre** Lösung $y_{\text{part}}(x)$ zu finden. Die allgemeine Lösung von (5.29) ergibt sich dann als Summe aus der partikulären und der allgemeinen homogenen Lösung zu

$$\boxed{y(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x)}. \tag{5.31}$$

Die partikuläre Lösung erhält man über die Methode der **Variation der Konstanten**. Wir suchen dabei eine Lösung $y_{\text{part}}(x)$, die sich nur durch einen Koeffizienten $c(x)$ von der homogenen Lösung $y_{\text{hom}}(x)$ unterscheidet,

$$y_{\text{part}}(x) = c(x) y_{\text{hom}}(x). \tag{5.32}$$

Geht man mit diesem Ansatz in die Differentialgleichung (5.29), so findet man

$$c(x)\frac{dy_{\text{hom}}(x)}{dx} + \frac{dc(x)}{dx} y_{\text{hom}}(x) + a(x)c(x)y_{\text{hom}}(x) = f(x). \tag{5.33}$$

Da $y_{\text{hom}}(x)$ die Lösung der homogenen Differentialgleichung sein soll, ist $dy_{\text{hom}}(x)/dx + a(x)y_{\text{hom}}(x) = 0$ und es bleibt

$$\frac{dc(x)}{dx} y_{\text{hom}}(x) = f(x) \tag{5.34}$$

übrig, womit als Bestimmungsgleichung für den unbekannten Koeffizienten $c(x)$ noch das Integral

$$c(x) = \int dx\, \frac{f(x)}{y_{\text{hom}}(x)} \tag{5.35}$$

zu lösen ist. Wie üblich ist das Integral nur bis auf eine Integrationskonstante bestimmt, die in die homogene Lösung gesteckt werden kann. Damit steht die vollständige Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (5.29) fest.

Als einfaches Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} - xy = -2x\,, \tag{5.36}$$

dessen allgemeine homogene Lösung durch Trennung der Variablen zu

$$y_{\text{hom}}(x) = ce^{x^2/2} \tag{5.37}$$

zu finden ist. Variation der Integrationskonstanten c liefert das Integral

$$c(x) = \int dx\, 2xe^{-x^2/2} = -2e^{-x^2/2}\,. \tag{5.38}$$

Die vollständige Lösung von (5.36) ist damit

$$y(x) = -2 + ce^{x^2/2}\,, \tag{5.39}$$

was man durch Einsetzen nachprüft.

5.3 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung treten überall in der Physik und der Ingenieurstechnik auf. Als Beispiel seien das zweite Newtonschen Gesetz der Mechanik genannt oder das Gesetz, das den Ladungsfluss in elektrischen Schaltungen beschreibt. Zum anderen lassen sich einige partielle Differentialgleichungen wie die Diffusionsgleichung oder die Schrödingergleichung in der Quantenmechanik unter gewissen Annahmen in lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung überführen. Wir konzentrieren uns vorwiegend auf Gleichungen mit konstanten Koeffizienten, die sich mit dem Exponentialansatz lösen lassen.

Die allgemeine Form einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0, \tag{5.40}$$

wobei a und b bekannte Grössen sind. Die Linearität der Gleichung (5.40) hat zur Folge, dass eine lineare Superposition

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \tag{5.41}$$

zweier Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ ebenfalls eine Lösung von (5.40) ist. Dieses wichtige Resultat, das **Superpositionsprinzip**, zeigt man leicht durch direktes Einsetzen in die Differentialgleichung.

5.3.1 Das charakteristische Polynom

Wir verwenden den Exponentialansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ in Gleichung (5.40) und finden

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0. \tag{5.42}$$

Da die Exponentialfunktion für endliche Werte von λ niemals verschwindet, muss der Vorfaktor in Klammern Null werden. Das ist das **charakteristische Polynom** der Differentialgleichung (5.40)

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0, \tag{5.43}$$

dessen Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \tag{5.44}$$

sind. Die allgemeine Lösung von (5.40) ist dann eine lineare Superposition der Form $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$. Allerdings müssen wir verschiedene Fälle unterscheiden, je nachdem wie die Koeffizienten a und b beschaffen sind.

Diskriminante $D = a^2/4 - b > 0$:

In diesem Fall sind beide Lösungen $\lambda_{1,2}$ des charakteristischen Polynoms reell und negativ, $\lambda_{1,2} < 0$. Wir erhalten also auf jeden Fall exponentiell gedämpfte Lösungen. Die allgemeine Lösung lautet demzufolge

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} = e^{-ax/2}\left(c_1 e^{\sqrt{D}x} + c_2 e^{-\sqrt{D}x}\right) \\ &= e^{-ax/2}\left[(c_1+c_2)\cosh\sqrt{D}x + (c_1-c_2)\sinh\sqrt{D}x\right], \qquad (5.45) \end{aligned}$$

wobei wir die Beziehungen $\cosh x \pm \sinh x = e^{\pm x}$ verwendet haben. Die Konstanten c_1 und c_2 werden durch die Anfangsbedingungen bestimmt. Offensichtlich gilt für $x = 0$:

$$y(0) = c_1 + c_2, \tag{5.46}$$

$$y'(0) = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 = -(c_1+c_2)a/2 + \sqrt{D}(c_1 - c_2). \tag{5.47}$$

Damit folgt als Lösung

$$y(x) = \frac{y'(0) - y(0)\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\, e^{\lambda_1 x} - \frac{y'(0) - y(0)\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\, e^{\lambda_2 x} \tag{5.48}$$

$$= e^{-ax/2}\left[y(0)\cosh\sqrt{D}x + \frac{y'(0) + y(0)a/2}{\sqrt{D}}\sinh\sqrt{D}x\right]. \tag{5.49}$$

Weil die Lösungen der charakteristischen Gleichung beide negativ sind, fällt die Lösung streng monoton von $y(0)$ zu Null ab.

Diskriminante $D = a^2/4 - b < 0$:

In diesem Fall sind die Lösungen $\lambda_{1,2}$ des charakteristischen Polynoms komplex konjugiert zueinander, $\lambda_1 = \lambda_2^*$. Die allgemeine Lösung von (5.40) lautet demnach

$$
\begin{aligned}
y(x) &= c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} = e^{-ax/2}\left(c_1 e^{i\sqrt{|D|}x} + c_2 e^{-i\sqrt{|D|}x}\right) \\
&= e^{-ax/2}\left[(c_1+c_2)\cos\sqrt{D}x + i(c_1-c_2)\sin\sqrt{D}x\right], \qquad (5.50)
\end{aligned}
$$

hier haben wir die Beziehungen $\cos x \pm i \sin x = e^{\pm ix}$ verwendet. Mit den Anfangsbedingungen $y(0)$ und $y'(0)$ finden wir analog zu der obigen Rechnung

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \frac{y'(0) - y(0)\lambda_1^*}{\lambda_1 - \lambda_1^*}\, e^{\lambda_1 x} - \frac{y'(0) - y(0)\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_1^*}\, e^{\lambda_1^* x} \qquad (5.51) \\
&= e^{-ax/2}\left[y(0)\cos\sqrt{|D|}x + \frac{y'(0) + y(0)a/2}{\sqrt{|D|}}\sin\sqrt{|D|}x\right]. \qquad (5.52)
\end{aligned}
$$

Die Lösung besteht aus einem Term, der mit der Frequenz $\sqrt{|D|}$ oszilliert, und einem Dämpfungsterm mit einer Dämpfungskonstanten $a/2$.

Diskriminante $D = a^2/4 - b = 0$:

Dieser Fall ist besonders interessant, weil es scheint, als ob nur eine einzige Lösung existieren würde, da $\lambda_1 = \lambda_2 = -a/2$ ist. Das kann aber nicht sein, da eine Differentialgleichung zweiter Ordnung durch zwei Anfangsbedingungen spezifiziert wird, was zwei unabhängige Lösungen erfordert. Die Differentialgleichung (5.40) wird also durch den Ansatz $y_1(x) = e^{\lambda x}$ gelöst, wenn $\lambda = -a/2$ gesetzt wird. Da λ aber vorerst ein beliebiger kontinuierlicher Parameter ist, kann nach ihm differenziert werden, bevor wir $\lambda = -a/2$ setzen. Wir berechnen also

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{d^2(e^{\lambda x})}{dx^2} + a\frac{d(e^{\lambda x})}{dx} + be^{\lambda x}\right] &= \frac{d^2(xe^{\lambda x})}{dx^2} + a\frac{d(xe^{\lambda x})}{dx} + b(xe^{\lambda x}) \\
&= (2\lambda + a)e^{\lambda x} + (\lambda^2 + a\lambda + b)(xe^{\lambda x}).
\end{aligned}
\qquad (5.53)
$$

Setzen wir hier $\lambda = -a/2$, so verschwinden beide Terme auf der rechten Seite unabhängig voneinander. Das heisst aber nichts anderes, als dass $y_2(x) = xe^{\lambda x}$ unsere gesuchte zweite unabhängige Lösung ist. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (5.40) ist demnach

$$
\boxed{y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-ax/2}}. \qquad (5.54)
$$

Die Lösung ist ebenfalls exponentiell gedämpt (für $a > 0$). Mit den Anfangsbedingungen $y(0)$ und $y'(0)$ finden wir schlussendlich

$$y(x) = \left[y(0) + \left(y'(0) + y(0)\frac{a}{2}\right) x\right] e^{-ax/2}. \tag{5.55}$$

5.3.2 Der harmonische Oszillator

In diesem Abschnitt werden wir uns ein konkretes physikalisches Beispiel ansehen, das alle drei unterschiedliche behandelte Fälle realisiert. Dazu stellen wir uns eine Masse m vor, die an einer Feder mit einer Federkonstanten k und Dämpfungskonstanten r senkrecht im Gravitationsfeld der Erde (Gravitationskonstante g) hängt (siehe Abb. 5.5).

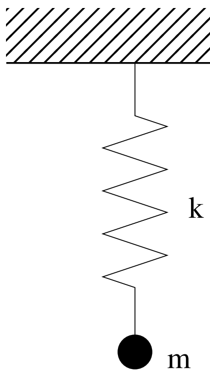

Abbildung 5.5: Federschwinger der Masse m im Schwerefeld der Erde mit Federkonstante k und Reibungskonstante r.

Das zweite Newtonsche Gesetz für die Auslenkung des Oszillators gibt

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt} - mg, \tag{5.56}$$

was in die Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x + g = 0 \tag{5.57}$$

umgeschrieben werden kann. Der inhomogene Term g lässt sich durch die Einführung der neuen Variablen $x - mg/k$ anstelle von x eliminieren. Die Position $-mg/k$ ist die Gleichgewichtslage des Federschwingers. Durch Einführen des Reibungsparameters $\gamma = r/m$ und der Eigenfrequenz $\omega_0^2 = k/m$ des Oszillators kann die Differentialgleichung für die Auslenkung des Federschwingers aus seiner Ruhelage $-mg/k$ in der Form

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0} \tag{5.58}$$

geschrieben werden.

Gleichung (5.58) ist nun genau in der Form (5.40), wobei wir die Koeffizienten mit $a = \gamma$ und $b = \omega_0^2$ identifizieren. Die Diskriminante wird damit zu $D = \gamma^2/4 - \omega_0^2$. Wir unterscheiden wieder die drei Fälle positiver, negativer bzw. verschwindender Diskriminante.

Diskriminante $D = \gamma^2/4 - \omega_0^2 > 0$:

In diesem Fall sind die beiden Lösungen des charakteristischen Polynoms

$$\lambda_1 = -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}\,, \quad \lambda_2 = -\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} \tag{5.59}$$

Setzen wir für die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $dx/dt|_{t=0} = 0$ ein, so wird die Lösung

$$x(t) = \frac{x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t}\right). \tag{5.60}$$

Da die Dämpfung γ grösser ist als die Eigenfrequenz des Oszillators (genauer, $\gamma > 2\omega_0$), spricht man vom **überdämpften** Fall. Wir haben schon bei der allgemeinen Behandlung gesehen, dass die Bewegung des Oszillators streng monoton gedämpft abläuft.

Diskriminante $D = \gamma^2/4 - \omega_0^2 < 0$:

In dem Fall negativer Diskriminante gilt offensichtlich $\gamma < 2\omega_0$, das heisst, dass die Schwingungen gegenüeber der Dämpfung dominiert. Damit sprechen wir vom **schwach gedämpften** Fall. Wie wir in der allgemeinen Betrachtung gesehen haben, sind die Lösungen des charakteristischen Polynoms komplex konjugiert zueinander,

$$\lambda_1 = -\frac{\gamma}{2} + i\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}\,, \quad \lambda_1 = -\frac{\gamma}{2} + i\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}\,. \tag{5.61}$$

Wir schreiben die Lösung der Differentialgleichung für die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $dx/dt|_{t=0} = 0$ wieder in der Form (5.60), modifizieren sie aber leicht, um die physikalischen Eigenschaften hervorzuheben. Die Lösungen des charakteristischen Polynoms $\lambda_{1,2}$ schreiben wir in Polarform als

$$\lambda_1 = |\lambda| e^{i\varphi}\,, \quad \lambda_2 = |\lambda| e^{-i\varphi}, \tag{5.62}$$

wobei beide Lösungen den gleichen Betrag $|\lambda| = \omega_0$ haben und sich nur um die Phase φ unterscheiden, die sich aus den Beziehungen

$$\sin\varphi = -\frac{\sqrt{|D|}}{\omega_0}\,, \quad \cos\varphi = -\frac{\gamma}{2\omega_0} \tag{5.63}$$

gewinnen läßt.

Führen wir die Bezeichnung $\omega = \sqrt{|D|}$ ein, dann kann die Lösung (5.60) geschrieben werden als

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{x_0 e^{-\gamma t/2}}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[(\lambda_1 - \lambda_2)\cos\omega t + i(\lambda_1 + \lambda_2)\sin\omega t\right] \\ &= -\frac{x_0 \omega_0 e^{-\gamma t/2}}{\omega}\sin\left(\varphi + \omega t\right). \end{aligned} \tag{5.64}$$

Obwohl die Lösungen $\lambda_{1,2}$ des charakteristischen Polynoms komplexe Zahlen sind, ist die Lösung der Differentialgleichung reell. Wie wir sehen, hängt sie von der Phase φ ab. Die Schwingungsfrequenz ist nicht mehr die Eigenfrequenz ω_0 selbst, sondern ist modifiziert zu $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$. Man prüft leicht nach, dass für $t = 0$ die Lösung (5.64) bei $x(0) = x_0$ mit $dx/dt|_{t=0} = 0$ startet, wie wir gefordert hatten.

Diskriminante $D = \gamma^2/4 - \omega_0^2 = 0$:

Im Falle **kritischer** Dämpfung, wenn die Diskriminante D verschwindet, gibt es nur eine Lösung des charakteristischen Polynoms, $\lambda = -\gamma/2$. Mit den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $dx/dt|_{t=0} = 0$ wird damit die Lösung der Differentialgleichung zu

$$x(t) = x_0\left(1 + \frac{\gamma}{2}t\right)e^{-\gamma t/2}. \tag{5.65}$$

Es tritt also überhaupt keine Schwingung mehr auf, sondern nur ein schneller exponentieller Abfall. Kritischer Dämpfung ist der schnellste Weg, einen

Oszillator wieder in seine Ruhelage zurückzubringen. Stoßdämpfer in Autos und Türdämpfer an Möbeln funktionieren nach diesem Prinzip.

Die drei Fälle unterkritischer, kritischer und überkritischer Dämpfung sind in Abbildung 5.6 dargestellt. Als Anfangsbedingungen wurden $x(0) =$

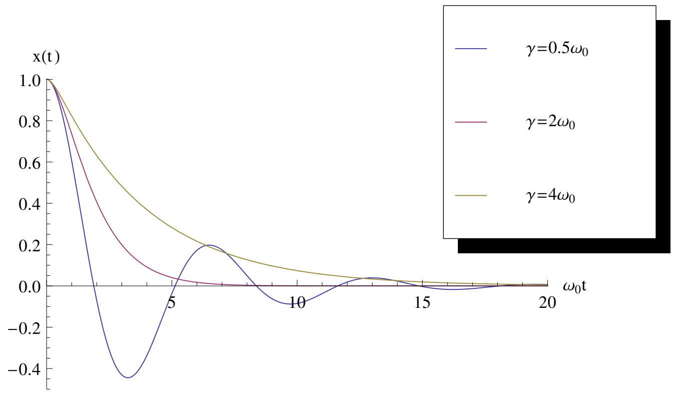

Abbildung 5.6: Die drei Fälle unterkritischer ($\gamma = 0.5\omega_0$), kritischer ($\gamma = 2\omega_0$) und überkritischer ($\gamma = 4\omega_0$) Dämpfung eines harmonischen Oszillators für die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0 = 1$ und $dx/dt|_{t=0} = 0$.

$x_0 = 1$ und $dx/dt|_{t=0} = 0$ gewählt. Man erkennt, dass alle Lösungen diese Anfangsbedingungen erfüllen und bei $t \to +\infty$ gegen Null streben, wobei die kritisch gedämpfte Lösung am schnellsten von allen verschwindet.

5.3.3 Lösung inhomogener Differentialgleichungen

Nachdem wir uns die Eigenschwingungen des gedämpften harmonischen Oszillators angeschaut haben, werden wir uns nun getriebenen Schwingungen und den dabei entstehenden Resonanzphänomenen zuwenden. Resonanzen entstehen immer dann, wenn ein oszillierendes System periodisch von aussen angeregt wird. Mathematisch gesehen heisst das, dass wir uns nun inhomogenen Differentialgleichungen, also solchen mit einem treibenden Term auf der rechten Seite, zuwenden müssen. Für einen harmonischen Oszillator der Masse m und einer Federkonstanten k heisst das, die inhomogene Differentialgleichung

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = F(t) \tag{5.66}$$

zu lösen, wobei $F(t)$ eine möglicherweise zeitabhängige externe Kraft ist.

Aus unserer allgemeinen Diskussion inhomogener Differentialgleichungen ist uns schon bekannt, dass die allgemeine Lösung der Gleichung (5.66) eine lineare Superposition der homogenen Lösung $x_{\mathrm{hom}}(t)$ und einer partikulären Lösung $x_{\mathrm{part}}(t)$ ist. Da wir die homogene Lösung im vorherigen Kapitel schon behandelt haben, konzentrieren wir uns auf die partikuläre Lösung. Bevor wir uns einer allgemeinen Lösungsmethode zuwenden, schauen wir uns einige wichtige Beispiele an.

Konstante treibende Kraft

Im einfachsten Fall hat die treibende Kraft $F(t)$ nur einen konstanten Wert $F_0 = mf_0$. Die Differentialgleichung (5.66) lautet demnach

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0, \tag{5.67}$$

wobei wir wieder die Bezeichnungen $\gamma = r/m$ für die Reibungskonstante und $\omega_0^2 = k/m$ für die Eigenfrequenz des Oszillators eingeführt haben. Die so erhaltene Differentialgleichung läßt sich durch die Substitution $\tilde{x} = x - x_0$ mit $x_0 = f_0/\omega_0^2$ auf eine homogene Differentialgleichung für $\tilde{x}$ zurückführen. Das bedeutet, dass in diesem Fall die Lösung wiederum eine gedämpfte Schwingung ist, allerdings um die modifizierte Ruhelage $x(0) = f_0/\omega_0^2$.

Linear wachsende treibende Kraft

Im nächsten Beispiel betrachten wir eine linear wachsende Kraft $F(t)/m = ct$, die einen ungedämpften harmonischen Oszillator antreibt. Die Differentialgleichung lautet also

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = ct. \tag{5.68}$$

Da wir wissen, dass die homogene Lösung eine Überlagerung von sinusartigen Schwingungen ist, suchen wir eine Lösung der Form

$$x(t) = c_1 \cos\omega_0 t + c_2 \sin\omega_0 t + x_{\mathrm{part}}(t), \tag{5.69}$$

wobei wir den Ansatz $x_{\mathrm{part}}(t) = at$ versuchen. Für den unbekannten Koeffizienten a finden wir durch Einsetzen in die Differentialgleichung $a = c/\omega_0^2$. Die Koeffizienten c_1 und c_2 folgen dann aus den Anfangsbedingungen. Zum

Beispiel wird für $x(0) = x_0 = 1$ und $dx/dt|_{t=0} = 0$ die Lösung unserer Differentialgleichung

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t - \frac{c}{\omega_0^3} \sin \omega_0 t + \frac{c}{\omega_0^2} t. \tag{5.70}$$

Die Lösung wächst demnach linear mit der Zeit an und oszilliert um die Gerade $x(t) = (c/\omega_0^2)t$.

Periodische treibende Kraft

Eine interessantere Situation tritt auf, wenn die treibende Kraft eine zeitlich periodische Funktion darstellt. Nehmen wir an, die externe Kraft habe die Form

$$\frac{F(t)}{m} = a \cos \omega t. \tag{5.71}$$

Wir suchen die partikuläre Lösung ebenfalls in der Form

$$x_{\text{part}}(t) = A \cos \omega t. \tag{5.72}$$

Mit den Ableitungen $dx_{\text{part}}/dt = -A\omega \sin \omega t$ und $d^2 x_{\text{part}}/dt^2 = -A\omega^2 \cos \omega t$ finden wir durch Einsetzen in die Differentialgleichung (5.66) für den Spezialfall $\gamma = 0$ die Lösung

$$x_{\text{part}} = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t. \tag{5.73}$$

Die allgemeine Lösung des periodisch getriebenen ungedämpften harmonischen Oszillators ist demnach

$$\boxed{x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t}. \tag{5.74}$$

Offensichtlich divergiert aber die partikuläre Lösung, sobald die Frequenz der treibenden Kraft in die Nähe der Eigenfrequenz des Oszillators kommt. Die Amplitude des Oszillators schaukelt sich über alle Grenzen auf. Dieses Phänomen nennt man **Resonanz**. In Anwesenheit von Dämpfung wird die Lösung etwas komplizierter, behält aber eine ähnliche Form. Die Amplitude wird im Resonanzfall immer noch sehr groß, bleibt aber im Gegensatz zum ungedämpften harmonischen Oszillators endlich.

Die Dämpfung von Resonanzen ist in der Ingenieurstechnik sehr wichtig. Beispielsweise können im Extremfall durch Resonanzen Brücken zum Einsturz gebracht werden. Das berühmteste Beispiel ist die Tacoma Narrows Bridge im US-Bundesstaat Washington, die im Jahre 1940 nach einem starken Seitenwind in Torsionsschwingungen versetzt wurde und zerbrach (siehe Abb. 5.7). In etwas unspektakulärerer Weise wurde nur zwei Tage nach ih-

Abbildung 5.7: Die Tacoma Narrows Bridge nach ihrem Einsturz im Jahre 1940. Bildnachweis: Wikipedia.

rer Eröffnung im Jahre 2000 die Londoner Millenium Bridge ('the wobbly bridge') für den Fußgängerverkehr wieder geschlossen, nachdem die auftretenden Resonanzen nicht genügend gedämpft wurden. Wie sich herausstellte, lag die niedrigste Eigenfrequenz der Brücke bei etwa 1 Hz und konnte somit von Fußgängern angeregt werden. Durch die Schrittanpassung der Besucher wurde die Schwingung immer weiter angeregt.

Wir kehren kurz zur allgemeinen Lösung (5.74) zurück und bestimmen die noch unbekannten Koeffizienten für eine anfänglich in Ruhe befindliche Masse, also für die Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $dx/dt|_{t=0} = 0$. Aus der ersten der beiden Bedingungen erhalten wir $c_1 = -a/(\omega_0^2 - \omega^2)$ und aus der zweiten Bedingung $c_2 = 0$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$x(t) = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2}(\cos \omega t - \cos \omega_0 t). \tag{5.75}$$

Mithilfe der Identität $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin(\alpha+\beta)/2\sin(\alpha-\beta)/2$ folgt dann

$$x(t) = 2\frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin\frac{(\omega_0+\omega)t}{2}\sin\frac{(\omega_0-\omega)t}{2}. \tag{5.76}$$

Das Verhalten der Lösung $x(t)$ ist im Abbildung 5.8 für die Parameter $a = 1$,

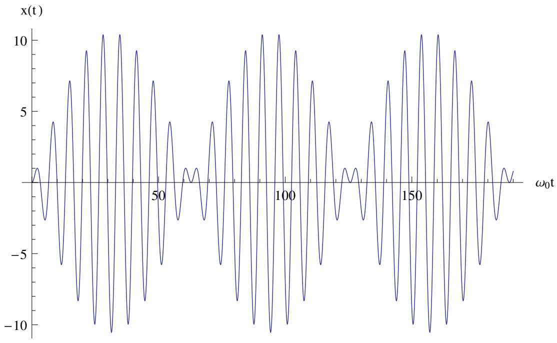

Abbildung 5.8: Die Lösung $x(t)$ des periodisch getriebenen Oszillators mit $a = 1$ für die Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $dx/dt|_{t=0} = 0$. Die Eigenfrequenz ist $\omega_0 = 1$ und die Frequenz der treibenden Kraft $\omega = 0.9$.

$\omega_0 = 1$ und $\omega = 0.9$ dargestellt. Man erkennt eine schnelle Grundschwingung der Summenfrequenz $(\omega_0+\omega)/2$, die durch eine langsame Einhüllende der Frequenz $(\omega_0-\omega)/2$ überlagert ist. Beide Frequenzen erscheinen explizit in Gleichung (5.76) als Argumente der beiden Sinusfunktionen. Dieses Phänomen bezeichnet man auch als **Schwebung**.

5.3.4 Lösung inhomogener Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch Variation der Konstanten

Wie auch für Differentialgleichungen erster Ordnung können wir auch hier die Methode der Variation der Konstanten zur Ermittlung der partikulären Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung heranziehen. Sei diese Differentialgleichung in der Form

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + p(x)\frac{dy(x)}{dx} + q(x)y(x) = f(x) \tag{5.77}$$

gegeben, wobei die Koeffizienten $p(x)$ und $q(x)$ selbst noch von der Variablen x abhängen können. Wir wissen schon, dass wir zwei linear unabhängige

Lösungen der homogenen Differentialgleichung (mit $f(x) = 0$) finden können, die wir mit $y_1(x)$ und $y_2(x)$ bezeichnen wollen.

Wir suchen nun eine partikuläre Lösung zu (5.77) in der Form

$$y_{\text{part}}(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \tag{5.78}$$

mit zu bestimmenden Koeffizienten $c_1(x)$ und $c_2(x)$. Differenzieren wir (5.78), so finden wir zunächst

$$\frac{dy_{\text{part}}(x)}{dx} = c_1(x)\frac{dy_1(x)}{dx} + c_2(x)\frac{dy_2(x)}{dx} + \frac{dc_1(x)}{dx}y_1(x) + \frac{dc_2(x)}{dx}y_2(x). \tag{5.79}$$

Wir suchen nun die partikuläre Lösung in der Form, dass

$$\frac{dc_1(x)}{dx}y_1(x) + \frac{dc_2(x)}{dx}y_2(x) = 0 \tag{5.80}$$

wird. Mit dieser Bedingung wird die Differentialgleichung (5.77) zu

$$\begin{aligned} &\left[c_1(x)\frac{d^2y_1(x)}{dx^2} + c_1(x)p(x)\frac{dy_1(x)}{dx} + q(x)y_1(x)\right] \\ &+ \left[c_2(x)\frac{d^2y_2(x)}{dx^2} + c_2(x)p(x)\frac{dy_2(x)}{dx} + q(x)y_2(x)\right] \\ &\qquad + \frac{dc_1(x)}{dx}\frac{dy_1(x)}{dx} + \frac{dc_2(x)}{dx}\frac{dy_2(x)}{dx} \quad = \quad f(x). \end{aligned} \tag{5.81}$$

Die beiden Terme in eckigen Klammern verschwinden, weil wir angenommen haben, dass $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen der homogenen Differentialgleichung sind. Damit bleibt als Bedingungsgleichung für die unbekannten Koeffizienten $c_1(x)$ und $c_2(x)$

$$\frac{dc_1(x)}{dx}\frac{dy_1(x)}{dx} + \frac{dc_2(x)}{dx}\frac{dy_2(x)}{dx} = f(x). \tag{5.82}$$

Zusammen mit Gleichung (5.80) haben wir damit zwei Gleichungen für die Ableitungen der unbekannten Koeffizienten, die wir in Matrixform

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ \frac{dy_1(x)}{dx} & \frac{dy_2(x)}{dx} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{dc_1(x)}{dx} \\ \frac{dc_2(x)}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \tag{5.83}$$

schreiben können. Multipliziert man beide Seiten mit dem Inversen dieser sogenannten **Fundamentalmatrix**, so bleibt

$$\begin{pmatrix} \frac{dc_1(x)}{dx} \\ \frac{dc_2(x)}{dx} \end{pmatrix} = \frac{1}{W(x)} \begin{pmatrix} \frac{dy_2(x)}{dx} & -y_2(x) \\ -\frac{dy_1(x)}{dx} & y_1(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}, \tag{5.84}$$

wobei wir mit W die sogenannte **Wronskideterminante**

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ \frac{dy_1(x)}{dx} & \frac{dy_2(x)}{dx} \end{vmatrix} \tag{5.85}$$

bezeichnet haben. Wie in der Vektoralgebra findet man, dass zwei homogene Lösungen, deren Wronskideterminante nicht identisch verschwindet, linear unabhängig voneinander sind.

Ausgeschrieben heisst (5.84), dass die beiden Integrale

$$c_1(x) = -\int dx\, \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}, \quad c_2(x) = \int dx\, \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)} \tag{5.86}$$

zu lösen sind. Wie erwartet, gibt es hier zwei unabhängige Integrationskonstanten, die wieder zu den homogenen Lösungen dazugeschlagen werden können.

Als Beispiel für die Anwendung dieser Methode schauen wir uns noch einmal den harmonischen Oszillator mit periodisch treibender Kraft $f_0(t) = a\cos\omega t$ an. Die homogenen Lösungen des ungedämpften Oszillators werden zu

$$x_1(t) = \cos\omega_0 t\,, \quad x_2(t) = \sin\omega_0 t \tag{5.87}$$

gewählt. Deren Wronskideterminante ist gerade $W = \omega_0$. Als partikuläre Lösung erhalten wir somit

$$x_{\mathrm{part}}(t) = c_1(t)\cos\omega_0 t + c_2(t)\sin\omega_0 t, \tag{5.88}$$

wobei sich die Koeffizienten $c_1(t)$ und $c_2(t)$ zu

$$\begin{aligned} c_1(t) &= -\frac{a}{\omega_0}\int^t dt' \sin\omega_0 t' \cos\omega t' + d_1, \\ c_2(t) &= \frac{a}{\omega_0}\int^t dt' \cos\omega_0 t' \cos\omega t' + d_2 \end{aligned} \tag{5.89}$$

berechnen. Die Integrale findet man zu

$$
\begin{aligned}
\int^t dt' \sin\omega_0 t' \cos\omega t' &= -\frac{\omega_0 \cos\omega_0 t \cos\omega t + \omega \sin\omega_0 t \sin\omega t}{\omega_0^2 - \omega^2}\,, \\
\int^t dt' \cos\omega_0 t' \cos\omega t' &= \frac{\omega_0 \sin\omega_0 t \cos\omega t - \omega \cos\omega_0 t \sin\omega t}{\omega_0^2 - \omega^2}\,. \qquad (5.90)
\end{aligned}
$$

Die Integrationskonstanten d_1 und d_2 bestimmen wir aus den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $dx/dt|_{t=0} = 0$ als

$$d_1 = -\frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2}\,, \quad d_2 = 0 \tag{5.91}$$

was, eingesetzt in den Ansatz (5.88), die gesuchte Lösung

$$x_{\text{part}}(t) = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(\cos\omega t - \cos\omega_0 t\right) \tag{5.92}$$

ergibt, was genau der Lösung (5.75) entspricht. Allerdings kann bei der Methode der Variation der Konstanten eine beliebige treibende Kraft vorgegeben werden.

5.3.5 Allgemeine Lösungsmethode inhomogener Differentialgleichungen (∗)

Es gibt natürlich auch eine allgemeine Methode zur Lösung inhomogener Differentialgleichungen. Diese benötigt aber etwas die Einführung etwas höherer Mathematik und soll hier nur der Vollständigkeit halber angegeben werden. Die Grundidee ist es, die **Fundamentallösung** der betreffenden Differentialgleichung zu bestimmmen, mithilfe derer beliebige Inhomogenitäten ausgewertet werden können. Dazu betrachten wir eine Differentialgleichung der Form

$$\sum_{m=0}^{n} a_m(t) \frac{d^m y(t)}{dt^m} = f(t). \tag{5.93}$$

Das ist offensichtlich eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung für die Funktion $y(t)$, die von einer äußeren Kraft $f(t)$ getrieben wird. In unserer bisherigen Vorgehensweise müssten wir eine partikuläre Lösung für jedes $f(t)$ einzeln finden. Das ist ziemlich umständlich.

Anstelle dessen suchen wir eine Lösung der Gleichung

$$\sum_{m=0}^{n} a_m(t) \frac{d^m E(t)}{dt^m} = \delta(t), \tag{5.94}$$

wobei $\delta(t)$ die sogenannte Dirac'sche δ-Funktion darstellt. Diese ist formal wie folgt definiert:

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \delta(t) = 1. \tag{5.95}$$

Die δ-Funktion ist damit eine unendlich scharfe Spitze am Punkt $t = 0$, die eine endliche Fläche überdeckt. So eine Konstruktion widerspricht der Definition einer normalen Funktion. Um mathematisch exakt zu sein, muss man den Begriff einer verallgemeinerten Funktion einführen, was aber hier zu weit ginge. Am einfachsten (und mathematisch exakt) ist es, sich die δ-Funktion als Grenzwert der Funktionenfolge

$$\delta_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi\epsilon} e^{-x^2/\epsilon} \tag{5.96}$$

für $\epsilon \to 0$ anzusehen, die immer schmaler und höher werdenden Gaußglocken entsprechen (siehe Abb. 5.9).

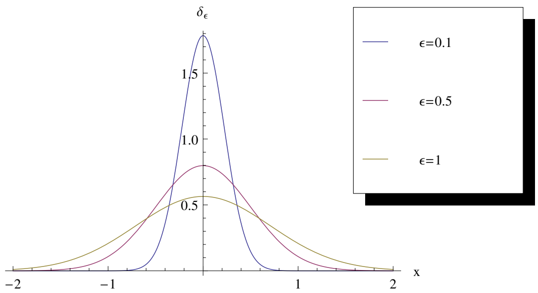

Abbildung 5.9: Die Diracsche δ-Funktion als Grenzwert immer schmalerer Glockenkurven.

In der Physik wird die δ-Funktion immer dann verwendet, wenn es um die idealisierte Beschreibung von Punktteilchen, also Massepunkten in der Mechanik oder Punktladungen in der Elektrodynamik, geht.

Die Lösung $E(t)$ der Gleichung (5.94) ist die sogenannte **Fundamentallösung** der Gleichung (5.93). Hat man $E(t)$ bestimmt, so kann die Lösung $y(t)$ für jede beliebige Funktion $f(t)$ durch eine Faltung ermittelt werden,

$$y(t) = (E \star f)(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz\, E(z) f(t-z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz\, E(t-z) f(z). \qquad (5.97)$$

Die Richtigkeit der Aussage weist man nach, indem man die Faltungseigenschaft der δ-Funktion $(f \star \delta)(t) = (\delta \star f)(t) = f(t)$ verwendet, was direkt aus ihrer Definition folgt.

Die Fundamentallösung bestimmt man mithilfe des folgenden Verfahrens. Man suche eine Lösung $Z(t)$ der homogenen Differentialgleichung

$$\sum_{m=0}^{n} a_m(t) \frac{d^m Z(t)}{dt^m} = 0, \qquad (5.98)$$

zum Beispiel über einen Exponentialansatz. Die Anfangsbedingungen werden so gewählt, dass

$$Z(0) = Z'(0) = \ldots = Z^{(n-2)} = 0\,, \quad Z^{(n-1)}(0) = 1 \qquad (5.99)$$

gilt. Nun zeigen wir, dass die Funktion

$$E(t) = \Theta(t) Z(t) \qquad (5.100)$$

mit der Heaviside-(Stufen-)funktion $\Theta(t)$ gerade die Fundamentallösung der Gleichung (5.94) ist. Dazu benutzen wir, dass $d\Theta(t)/dt = \delta(t)$ gilt, was sicherlich einzusehen ist, da der Sprung der Heavisidefunktion bei $t = 0$ gerade einem unendlich starken Anstieg entspricht. Dann gilt

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{d\Theta(t)}{dt} Z(t) + \Theta(t) \frac{dZ(t)}{dt} = \delta(t) Z(0) + \Theta(t) \frac{dZ(t)}{dt} = \Theta(t) \frac{dZ(t)}{dt} \qquad (5.101)$$

für alle einschließlich der $(n-1)$-ten Ableitung. Für die n-te Ableitung gilt dann

$$\begin{aligned} E^{(n)}(t) &= \Theta'(t) Z^{(n-1)}(t) + \Theta(t) Z^{(n)}(t) = \delta(t) Z^{(n-1)}(0) + \Theta(t) Z^{(n)}(t) \\ &= \delta(t) Z^{(n-1)}(0) + \Theta(t) Z^{(n)}(t) = \delta(t) + \Theta(t) Z^{(n)}(t). \end{aligned} \qquad (5.102)$$

Da $Z(t)$ eine Lösung der homogenen Gleichung ist, folgt, dass die so konstruierte Funktion $E(t)$ tatsächlich die Fundamentallösung von (5.94) ist.

Lineare Differentialgleichung erster Ordnung

Wir werden uns zwei kurze Beispiele ansehen, an denen diese Methode demonstriert werden soll. Zuerst betrachten wir eine Differentialgleichung erster Ordnung der Form

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = f(t). \tag{5.103}$$

Die Lösung $Z(t)$ der dazugehörigen homogenen Gleichung mit der Anfangsbedingung $Z(0) = 1$ kennen wir schon aus einem vorangegangenen Kapitel, sie lautet einfach $Z(t) = e^{-at}$. Damit ist die Fundamentallösung der Gleichung (5.103)

$$E(t) = \Theta(t)e^{-at} \tag{5.104}$$

und die vollständige Lösung

$$y(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz\, \Theta(z)e^{-az}f(t-z) = \int\limits_{0}^{\infty} dz\, e^{-az}f(t-z). \tag{5.105}$$

Somit kann für jede beliebige Funktion $f(t)$ die Lösung von (5.103) sofort hingeschrieben werden.

Lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

Als nächstes sehen wir uns die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \omega_0^2 y(t) = f(t) \tag{5.106}$$

an. Diese Gleichung ist uns schon als Schwingungsdifferentialgleichung eines getriebenen ungedämpften harmonischen Oszillators begegnet. Die Lösung $Z(t)$ der dazugehörigen homogenen Gleichung mit den Anfangsbedingungen $Z(0) = 0$ und $dZ(t)/dt|_{t=0} = 1$ berechnet man zu $Z(t) = (\sin\omega_0 t)/t$. Damit wird die Lösung der Gleichung (5.106)

$$y(t) = \int\limits_{0}^{\infty} dz\, \frac{\sin\omega_0 z}{\omega_0} f(t-z). \tag{5.107}$$

Erinnern wir uns an die Diskussion zu Resonanzen, so hatten wir es mit einer periodischen treibenden Kraft zu tun. Also setzen wir $f(t) = a\cos\omega t$

und berechnen das Faltungsintegral zu

$$y(t) = \frac{a}{\omega_0} \int\limits_0^\infty dz \, \sin \omega_0 z \cos \omega (t-z). \tag{5.108}$$

Formal divergiert dieses Integral, deshalb müssen wir uns mit einem Trick behelfen. Wir schreiben die trigonometrischen Funktionen um in Exponentialfunktionen und führen einen konvergierenden Faktor ein, den wir am Ende der Rechnung wieder entfernen werden. Wir schreiben also

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{a}{4i\omega_0} \int\limits_0^\infty dz \, \left[e^{i\omega_0 z - \epsilon z} - e^{-i\omega_0 z - \epsilon z} \right] \left[e^{i\omega(t-z) - \epsilon z} - e^{-i\omega(t-z) - \epsilon z} \right] \\ &\overset{\epsilon \to 0}{=} \frac{a}{4i\omega_0} \left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \right) \left(-\frac{1}{i(\omega_0 - \omega)} + \frac{1}{-i(\omega_0 + \omega)} \right) \\ &= \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t, \end{aligned} \tag{5.109}$$

was nichts anderes ist als die partikuläre Lösung (5.73). Allerdings können mit dieser hier beschriebenen allgemeinen Methode auch andere treibende Kräfte behandelt werden.

5.4 Systeme gekoppelter Differentialgleichungen

In vielen Fällen hat man physikalische Situationen vorliegen, in denen eine Variable zur Beschreibung des Systems nicht ausreicht. Zum Beispiel kann man sich gekoppelte Pendel vorstellen, die mit Federn untereinander verbunden sind. Jedem dieser Pendel wird man eine Koordinate zuordnen, so dass ein System gekoppelter Differentialgleichungen entsteht. Diesem Problem wollen wir uns nun zuwenden.

Stellen wir uns folgende Situation vor: zwei Pendel gleicher Masse m und Länge l werden nebeneinander gehängt und mit einer Feder mit Federkonstanten k horizontal verbunden (siehe Abb. 5.10). Bezeichnen wir die (kleinen) horizontalen Auslenkungen der Pendel mit x_1 und x_2, so lauten die

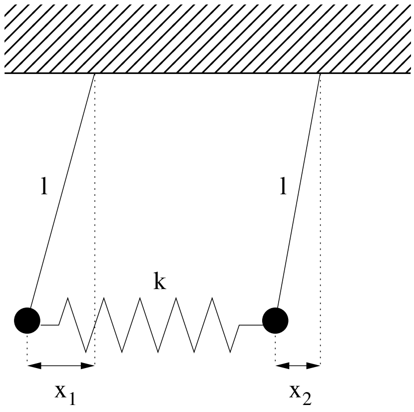

Abbildung 5.10: Gekoppelte Pendel der Länge l.

Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x}_1 + \frac{g}{l}x_1 + \frac{k}{m}(x_1 - x_2) = 0, \tag{5.110a}$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{g}{l}x_2 + \frac{k}{m}(x_2 - x_1) = 0. \tag{5.110b}$$

In beiden Gleichungen tauchen beide Ortsvariablen gleichzeitig auf, so dass jede Gleichung für sich nicht gelöst werden kann, weil sie von der Lösung der jeweils anderen Gleichung abhängt.

Man kann beide Gleichungen voneinander entkoppeln, wenn man die neuen Variablen

$$x_+ = x_1 + x_2\,, \qquad x_- = x_1 - x_2 \tag{5.111}$$

einführt. Für diese Variablen ergibt sich aus Addition bzw. Subtraktion von (5.110a) und (5.110b) die Differentialgleichungen

$$\ddot{x}_+ + \frac{g}{l}x_+ = 0, \tag{5.112a}$$

$$\ddot{x}_- + \frac{g}{l}x_- + \frac{2k}{m}x_- = 0, \tag{5.112b}$$

die nunmehr beide getrennt gelöst werden können. Man erkennt, dass die jeweiligen Schwingungsfrequenzen verschieden sind. Man liest ab, dass $\omega_+^2 = g/l$ ist, aber dass $\omega_-^2 = g/l + 2k/m$ gilt, obwohl die Eigenfrequenzen der ungekoppelten Pendel gleich sind, $\omega_1^2 = \omega_2^2 = g/l$.

In diesem einfachen System kann man leicht erkennen, was passiert. Die Variable x_+ beschreibt gerade eine Bewegung, in der beide Pendel 'in Phase' schwingen. Effektiv sind damit beide Pendel entkoppelt und die Schwingungsfrequenz ist gleich der Eigenfrequenz der ungekoppelten Pendel. Die Variable x_- hingegen beschreibt eine Bewegung, in der beide Pendel gegenläufige Schwingungen durchführen, also 'außer Phase' sind. Damit wird die Feder zwischen beiden Pendeln aktiv und verändert die Schwingungsfrequenz. Die Variablen, in denen die Differentialgleichungen (5.110a) und (5.110b) entkoppeln, nennt man **Normalmoden** oder Normalschwingungen.

Diese einfache Eliminierungsmethode funktioniert sicherlich nur für Systeme von wenigen gekoppelten Differentialgleichungen. Schreibt man (5.110a) und (5.110b) in vektorieller Form, so erkennt man ein allgemeines Prinzip:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{g}{l} + \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{g}{l} + \frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} . \tag{5.113}$$

Die Eigenwerte der Matrix sind $\lambda_1 = g/l$ und $\lambda_2 = g/l + 2k/m$, also offensichtlich genau die gesuchten Eigenfrequenzen der gekoppelten Schwingungen. Die Eigenvektoren der Matrix liefern die dazugehörigen Eigenmoden x_+ und x_-. Die Diagonalisierung liefert die Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_+ \\ \ddot{x}_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{g}{l} & 0 \\ 0 & \frac{g}{l} + \frac{2k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_+ \\ x_- \end{pmatrix} , \tag{5.114}$$

was zeigt, dass die Differentialgleichungen für die Normalmoden tatsächlich entkoppeln.

Allgemein kann man gekoppelte Differentialgleichungen in der Form

$$\ddot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{M} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{5.115}$$

schreiben. Die Matrix $\boldsymbol{M}$ enthält die rücktreibenden Kräfte, die auf die Massenpunkte an den Koordinaten x_i wirken. Bezeichnen wir die Matrix der Eigenwerte von $\boldsymbol{M}$ mit $\boldsymbol{\Lambda}$, dann gilt die Beziehung

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{D}^{-1} \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{D}, \tag{5.116}$$

wobei die Matrix $\boldsymbol{D}$ die Eigenvektoren von $\boldsymbol{M}$ enthält. Setzt man diese Beziehung in (5.115) ein, so erhält man

$$\ddot{\mathbf{y}} + \boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{0}, \tag{5.117}$$

wobei $\mathbf{y} = \boldsymbol{D} \cdot \mathbf{x}$ die Eigenmoden bezeichnet. Die allgemeine Lösung der Matrixgleichung (5.117) ist eine Superposition aus trigonometrischen Funktionen für jede Komponente y_i. Über die Rücktransformation $\mathbf{x} = \boldsymbol{D}^{-1} \cdot \mathbf{y}$ erhält man die Lösung der Bewegungsgleichung für jedes individuelle Pendel.

Die Lösungsmethode durch Matrixdiagonalisierung funktioniert natürlich in beliebigen Dimensionen, also für beliebig viele gekoppelte Differentialgleichungen. Im Extremfall kann es sich dabei um unendlich viele Oszillatoren handeln. Solche Probleme treten in der Quantenmechanik und der Festkörperphysik auf.