

Kapitel 3

Optische Resonatoren

Optische Resonatoren sind Bauelemente, in denen das elektromagnetische Feld zwischen gut reflektierenden Spiegeln eingeschlossen ist, die die Modenstruktur definieren. Bei der Modenentwicklung des freien Feldes hatten wir uns zunutze gemacht, dass wir einen beliebigen vollständigen Satz orthonormaler Basisfunktionen des Helmholtzoperators zur Darstellung der elektromagnetischen Feldes verwenden konnten. Insbesondere war es egal, welches Koordinatensystem für die Entwicklung verwendet wird. In einem Resonator ist es die Geometrie der Spiegel, die eine spezielle Wahl der Moden vorschreibt. Damit ist auch sofort klar, dass sich optische Resonatoren zur Selektion spezieller Moden eignen.

3.1 Planare Resonatoren

Wir betrachten zunächst zwei planparallele, unendlich ausgedehnte Platten, die nicht vollständig reflektieren sollen, sondern einen endlichen Transmissionsgrad T_i und damit einen Reflexionsgrad R_i besitzen (Abb. 3.1). In diesem Fabry–Perot-Resonator der Länge L soll unter einem Winkel Θ eine monochromatische ebene elektromagnetische Welle einlaufen, die die Form

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 \mathbf{e}_\sigma e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (3.1)$$

hat. Die Amplitude E'_0 des Feldes hinter dem Fabry–Perot-Resonator ist dann als Superposition aller Partialwellen, die im Inneren des Resonators vielfach reflektiert werden, gegeben. Diese setzen sich aus den Transmissionen durch die beiden Spiegel und den Reflexionen im Inneren mit den dazugehörigen

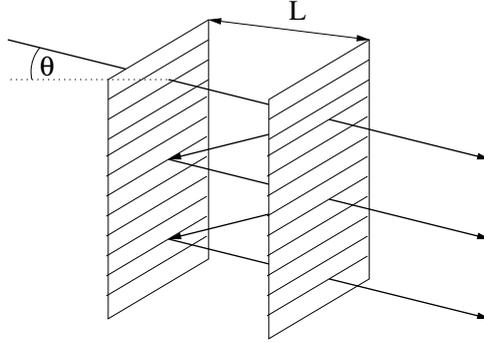


Abbildung 3.1: Fabry–Perot-Resonator, bestehend aus zwei planparallelen Spiegeln mit Transmissionsgraden T_i .

Phasenbeziehungen als

$$\frac{E'_0}{E_0} = T (1 + R e^{i\delta} + R^2 e^{2i\delta} + \dots) = \frac{T}{1 - R e^{i\delta}} \quad (3.2)$$

[$T = \sqrt{T_1 T_2}$, $R = \sqrt{R_1 R_2}$] zusammen, wobei die Phasenverschiebungen

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (2L) \cos \Theta \quad (3.3)$$

aus dem Laufunterschied zweier benachbarter Partialwellen herrühren. Die Transmissionsfunktion des Resonators ist damit

$$T_{\text{FP}} = \left| \frac{E'_0}{E_0} \right|^2 = \left(\frac{T}{1 - R} \right)^2 \left[1 + \frac{4R}{(1 - R)^2} \sin^2 \frac{\delta}{2} \right]^{-1}. \quad (3.4)$$

Diese ist in Abb. 3.2 dargestellt.

Die Maxima der Transmissionsfunktion werden bei Phasenverschiebungen $\delta = 2\pi n$ ($n \in \mathcal{N}$) erreicht, also bei konstruktiver Interferenz der Partialwellen. Die Phasendifferenz ist proportional zur Frequenz bei festgehaltener Resonatorlänge, und proportional zur Länge L bei fester Frequenz. Im Frequenzraum liegen die Maxima bei

$$\nu_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = n \frac{c}{2L \cos \Theta} \quad (3.5)$$

und die Halbwertsbreiten der Transmissionsregionen sind durch

$$\Delta\nu = \frac{c}{2L \cos \Theta} \frac{1 - R}{\pi\sqrt{R}} \quad (3.6)$$

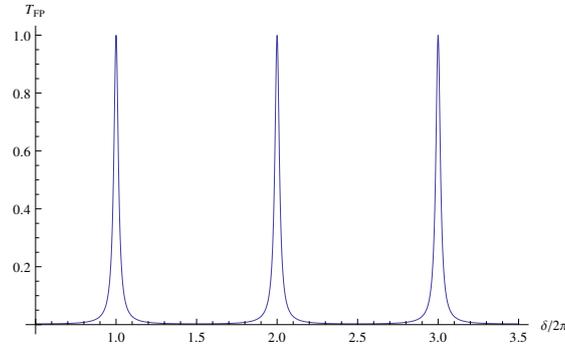


Abbildung 3.2: Transmission eines Fabry–Perot-Resonators.

gegeben. Der Abstand zweier Maxima,

$$\delta\nu = \frac{c}{2L \cos \Theta}, \quad (3.7)$$

wird als Dispersionsregion oder **freier Spektralbereich** (*free spectral range*) bezeichnet. Das Verhältnis

$$F = \frac{\delta\nu}{\Delta\nu} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R} \quad (3.8)$$

ist die **Finesse** des Resonators. Die Finesse gibt in etwa die maximale Zahl der interferierenden Partialwellen an, beziehungsweise die Anzahl der Reflexionen einer Welle, bis sie aus einem der Spiegel austritt, wie wir gleich sehen werden.

Die besten Resonatoren, die bisher gebaut wurden, sind supraleitende Strukturen, die im Mikrowellenbereich und bei extrem tiefen Temperaturen arbeiten. Das in Abb. 3.3 abgebildete Exemplar¹ hat eine Finesse von $F = 4.6 \times 10^9$. Es ist ein für elektronische Übergänge von hochangeregten Rydbergatomen ausgelegter Mikrowellenspiegel (51 GHz), der bei $T = 0.8\text{K}$ arbeitet, also weit unterhalb der Sprungtemperatur von Niob, das als supraleitender Film auf einem Kupferspiegel aufgetragen wurde.

Um einschätzen zu können, wie eindrucksvoll dieser Resonator ist, berechnen wir dessen Abklingzeit. Wir nehmen an, dass die eingestrahelte Welle zu einem Zeitpunkt $-t_T$, wobei t_T die Transitzeit des nicht reflektierten

¹S. Kuhr *et al.*, Appl. Phys. Lett. **90**, 164101 (2007).

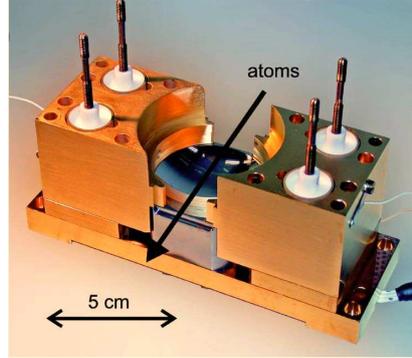


Abbildung 3.3: Experimenteller Aufbau des derzeit besten Fabry-Perot-Resonators mit einer Finesse von $F = 4.6 \times 10^9$. Der obere Spiegel ist abgenommen.

Strahls ist, abgeschaltet wird. Dann wird die auslaufende Welle schwächer, weil immer weniger Partialwellen zu ihrer Intensität beitragen. Zur Zeit $t_j = j(2L \cos \Theta/c)$ ist das elektrische Feld

$$\frac{E'_0}{E_0} = T \sum_{k=j}^{\infty} (Re^{i\delta})^k = \frac{T(Re^{i\delta})^j}{1 - Re^{i\delta}} \quad (3.9)$$

und dessen Intensität

$$\left| \frac{E'_0}{E_0} \right|^2 = R^{2j} \left(\frac{T}{1-R} \right)^2 \left[1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\delta}{2} \right]^{-1} \quad (3.10)$$

und damit um einen Faktor

$$R^{2j} = \exp(2j \ln R) = \exp \left[t_j \left(\frac{c}{2L \cos \Theta} \right) 2 \ln R \right] \quad (3.11)$$

kleiner. Im kontinuierlichen Limes folgt daraus ein exponentieller Zerfall der Form $e^{-t/\tau}$ mit der Zerfallszeit

$$\tau = -\frac{2L \cos \Theta}{c} \frac{1}{2 \ln R} \simeq \frac{2L F}{c 2\pi}, \quad (3.12)$$

wobei wir in der Abschätzung einen senkrechten Einfall der Welle und eine große Finesse vorausgesetzt haben. Hieran erkennen wir, dass die mittlere

Anzahl der Umläufe eines Photons tatsächlich der Finesse entspricht. Mit dem Zahlenbeispiel von oben und dem Spiegelabstand $L = 27.57\text{mm}$ erhalten wir $\tau = 0.13\text{s}$. Ein einzelnes Photon legt also im Schnitt etwa 40000 km zurück, bevor es den Resonator wieder verlässt.

Mit der Zerfallszeit definiert man eine weitere Größe, den **Gütefaktor** $Q = \omega_0\tau$, wobei ω_0 die Resonanzfrequenz des Resonators ist. Die Bewegungsgleichung der jeweiligen klassischen Feldmoden im Resonator wird dann zu

$$\ddot{u}_\lambda(t) + \frac{2}{\tau}\dot{u}_\lambda(t) + \omega_\lambda u_\lambda(t) = 0, \quad (3.13)$$

was einem gedämpften harmonischen Oszillator entspricht, dessen Amplitude mit der Zeitkonstante τ gedämpft ist. Damit erhalten wir einen phänomenologischen Zugang zu verlustbehafteten Resonatoren, der aber in der Quantentheorie noch erweitert werden muss. Der Grund liegt in den bosonischen Vertauschungsregeln, die für alle Zeiten gültig sein müssen, aber bei naiver Quantisierung der gedämpften Moden $u_\lambda(t)$ exponentiell mit der Zeit abfallen².

3.2 Kugelresonatoren und Gaußstrahlen

Planare Resonatoren haben den entscheidenden Nachteil, dass sie extrem genau justiert werden müssen, damit sich ein einfallender Strahl (typischerweise mit endlicher transversaler Ausdehnung) mit den reflektierten Partialwellen überlagert. Deswegen werden in der Praxis meist Kugelresonatoren eingesetzt (in der Tat ist in Abb. 3.3 ein solcher gezeigt). Die Eigenmoden von Kugelresonatoren sind die uns schon bekannten Gaußschen Moden. Der Grund ist, dass deren Wellenfronten gekrümmt sind und somit an die Krümmung der Resonatorspiegel angepasst sind. Ein auf einen sphärischen Spiegel auftreffender Gaußstrahl wird in sich selbst reflektiert, wenn die Krümmungen von Spiegel und Strahl übereinstimmen. Wir erhalten also einen Kugelresonator, wenn wir in Abb. 2.1 Spiegel mit passenden Krümmungen an die richtigen Stellen des Gaußprofils setzen.

Wir haben auch gesehen, dass Hermite–Gauß-Moden Lösungen derselben paraxialen Helmholtzgleichung sind, die ebenfalls dieselben Wellenfronten wie die Gaußstrahlen besitzen. Damit ist klar, dass Kugelresonatoren auch

²Mehr dazu in meiner Vorlesung im Sommersemester.

Hermite-Gauß-Moden als Eigenmoden besitzen. Die Phase einer solchen Mode mit Indizes (m, n) hat auf der Strahlachse $\varrho = 0$ den Wert

$$\varphi(0, z) = kz + (m + n + 1)\zeta(z). \quad (3.14)$$

Damit konstruktive Interferenz auftritt, muss die Phasenverschiebung der Welle nach einem vollständigen Umlauf durch den Resonator der Länge L ein Vielfaches von 2π sein,

$$2kL + 2(m + n + 1)\Delta\zeta = 2\pi q, \quad q \in \mathcal{Z}, \quad (3.15)$$

wobei $\Delta\zeta = \zeta(z_2) - \zeta(z_1)$ die Differenz der Gouyphasen an den Spiegelpositionen darstellt. Der Abstand zweier Resonanzfrequenzen ist somit $\delta\nu = c/(2L)$, wenn man $k = 2\pi\nu/c$ setzt. Diese Beziehung hatten wir schon für den planaren Resonator gefunden.

Die Resonanzfrequenzen dieser Resonatormoden sind also

$$\nu_{m,n,q} = q\delta\nu + (m + n + 1)\frac{\Delta\zeta}{\pi}\delta\nu. \quad (3.16)$$

Die Moden tragen drei Indizes; Moden mit verschiedenem q , aber gleichen (m, n) haben gleiche transversale Intensitätsverteilungen und werden als **longitudinale** Moden bezeichnet. Die Indizes (m, n) beschreiben die unterschiedlichen **transversalen** Moden. Aus (3.16) liest man weiterhin ab, dass alle transversalen Moden mit der gleichen Indexsumme $m + n$ dieselbe Resonanzfrequenz besitzen. Zwei transversale Moden mit demselben longitudinalen Index q haben den Frequenzabstand

$$\nu_{m,n,q} - \nu_{m',n',q} = [(m + n) - (m' + n')]\frac{\Delta\zeta}{\pi}\delta\nu, \quad (3.17)$$

womit die Frequenzverschiebung zwischen den Gruppen von longitudinalen Moden charakterisiert ist.