

# Kapitel 2

## Wellenoptik und Strahlenoptik, Fermatsches Prinzip

### 2.1 Die Maxwell'schen Gleichungen

Jede Betrachtung zur Physik des Lichts beginnt mit den Maxwell'schen Gleichungen der Elektrodynamik, aus denen sich alle Lichtausbreitungsvorgänge ableiten lassen. Im freien Raum ohne äußere Quellen nehmen diese die folgende Form an:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t), \quad (2.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \dot{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t). \quad (2.1d)$$

Wir verwenden die traditionellen Begriffe **magnetische Induktion** für  $\mathbf{B}$ , **elektrisches Feld** für  $\mathbf{E}$ , **dielektrische Verschiebung** für  $\mathbf{D}$  und schließlich **magnetisches Feld** für  $\mathbf{H}$ . Diese vier Felder sind nicht unabhängig voneinander, sondern sie sind durch sogenannte **Materialgleichungen** miteinander verknüpft. Im freien Raum sind dies einfach lineare Relationen der Form

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad (2.2)$$

wobei  $\varepsilon_0$  die **Permittivität des Vakuums** und  $\mu_0$  die **Permeabilität des Vakuums** darstellen. Die Gleichungen (2.2) werden im Folgenden diejeni-

gen sein, die den Zusammenhang zu Materialgrößen wie Polarisation und Magnetisierung herstellen werden.

Die Maxwell'schen Gleichungen zerfallen in zwei Gruppen, deren Aufteilung aber zunächst nicht eindeutig ist. Man erkennt, dass die Gleichungen (2.1a) und (2.1c) sowie (2.1b) und (2.1d) jeweils formal die gleiche Struktur besitzen. Man wäre also dazu geneigt, die Felder  $(\mathbf{D}, \mathbf{B})$  und  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  formal als zusammengehörend zu betrachten. Schließlich treten nur von  $(\mathbf{D}, \mathbf{B})$  Zeitableitungen in den Maxwell'schen Gleichungen auf, so dass die zeitliche Entwicklung der Felder formal nur  $(\mathbf{D}, \mathbf{B})$  betrifft. Diese Zuordnung spielt in der formalen Theorie der Elektrodynamik eine bedeutende Rolle, wir werden darauf im Zusammenhang mit der Transformationsoptik noch einmal zurückkommen.

Die alternative Gruppierung, die aus der Struktur der Maxwell'schen Gleichungen folgt, ist, die Felder  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  und  $(\mathbf{D}, \mathbf{H})$  als zusammengehörend anzusehen. Dies hat den physikalischen Grund, dass  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  als mikroskopische Felder anzusehen sind, während  $(\mathbf{D}, \mathbf{H})$  die aus den Materialgleichungen abgeleiteten makroskopischen Größen darstellen. Beide Aufteilungen der Felder haben also ihre Berechtigung, die auf jeweils verschiedene Anwendungen zugeschnitten sind. Wir werden uns zunächst auf die physikalische Aufteilung konzentrieren.

### 2.1.1 Wellengleichung für elektromagnetische Felder

Wir gehen zurück zu den Maxwell'schen Gleichungen und schreiben sie in eine Form um, so dass nur noch eine Größe, beispielsweise das elektrische Feld, auftaucht. Dazu berechnen wir die Rotation von (2.1b),

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \times \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t), \quad (2.3)$$

setzen die Materialgleichung für die magnetische Induktion ein und verwenden (2.1d) mit dem Ergebnis

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.4)$$

wobei wir noch die Beziehung  $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$  verwendet haben, in der  $c$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum bezeichnet. Aus der Vektoridentität  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{V} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{V}$ , die für beliebige Vektorfelder  $\mathbf{V}$  gilt, und

unter Verwendung von (2.1c) folgt schließlich die **Wellengleichung** für das elektrische Feld

$$-\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.5)$$

Die Fundamentallösungen der Gleichung (2.5) sind ebene Wellen der Form

$$\mathbf{e}_\sigma e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad (2.6)$$

die durch einen **Polarisationseinheitsvektor**  $\mathbf{e}_\sigma$ , einen **Wellenvektor**  $\mathbf{k}$  und eine **Frequenz**  $\omega$  charakterisiert sind. Setzt man diesen Ansatz in (2.5) ein, so findet man die Beziehung

$$\mathbf{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (2.7)$$

zwischen dem Betrag des Wellenvektors und der Frequenz, die **Dispersionsrelation** des Vakuums genannt wird. Die Polarisationseinheitsvektoren sind notwendig, um den Vektorcharakter des elektrischen Feldes zu gewährleisten. Aus der Gleichung (2.1c) und den Materialgleichungen folgt, dass das elektrische Feld ein **transversales** Vektorfeld ist. Das heisst, dass der Vektor des elektrischen Feldes senkrecht zur Ausbreitungsrichtung steht, wie man durch Fouriertransformation von (2.1c) erkennt.

Für monochromatische Wellen der Frequenz  $\omega$  schreiben wir also

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad (2.8)$$

deren Wellenvektor wieder durch die Dispersionsrelation (2.7) eingeschränkt ist. Setzt man diesen Ansatz in die Maxwell'schen Gleichungen ein, so findet man die zusätzlichen Beziehungen für die Amplituden der Felder

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega \mathbf{B}_0 \quad (2.9)$$

sowie

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 = -\frac{\omega}{c^2} \mathbf{E}_0. \quad (2.10)$$

Daraus folgt, dass  $(\mathbf{k}, \mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0)$  ein orthogonales Dreibein bilden. Die Schwingungsrichtungen  $\mathbf{E}_0$  und  $\mathbf{B}_0$  stehen also in der Tat senkrecht zur Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{k}$  wie angenommen.

### 2.1.2 Polarisation

Da die Wellengleichung (2.5) linear ist, gilt das Superpositionsprinzip und die Summe zweier Lösungen ist wiederum eine Lösung der Wellengleichung. Somit können wir die Amplitude  $\mathbf{E}_0$  mithilfe der Polarisationsinheitsvektoren zerlegen in

$$\mathbf{E}_0 = E_1 \mathbf{e}_1 + E_2 \mathbf{e}_2, \quad (2.11)$$

wobei die Amplituden  $E_1$  und  $E_2$  selbst im allgemeinen komplexe Größen sind. Damit können wir schreiben

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_1 |E_1| e^{i\delta_1} + \mathbf{e}_2 |E_2| e^{i\delta_2}. \quad (2.12)$$

Die Phasenlage der Größen  $\delta_1$  und  $\delta_2$  verwendet man zur Klassifizierung der möglichen Polarisationszustände:

- Elliptische Polarisation:  $\delta_1 \neq \delta_2$ . Der Feldvektor  $\text{Re}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  rotiert an einem festen Ort  $\mathbf{r}$  auf einer Ellipse in der durch  $\mathbf{e}_1$  und  $\mathbf{e}_2$  aufgespannten Ebene.
- Zirkulare Polarisation:  $\delta_1 = \delta_2 \pm \pi/2$ ,  $|E_1| = |E_2|$ . Der Feldvektor  $\text{Re}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  beschreibt einen Kreis mit Radius  $|E_1|$  mit positiver bzw. negativer **Helizität**, wenn  $\delta_1 = \delta_2 + \pi/2$  bzw.  $\delta_1 = \delta_2 - \pi/2$  gilt.
- Lineare Polarisation:  $\delta_1 = \delta_2$ . Der Feldvektor  $\text{Re}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  bewegt sich auf einer Geraden in der  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ -Ebene.

### 2.1.3 Maxwell'sche Gleichungen in kovarianter Form

Die Maxwell'schen Gleichungen und somit auch die Wellengleichung lassen sich sehr kompakt in kovarianter Form schreiben. Dazu führen wir die folgende Notation ein: Die **kontravarianten** und **kovarianten** Komponenten eines Vierervektors  $a$  bestehen aus der zeitlichen Komponente  $a^0$  und dem räumlichen Dreiervektor  $\mathbf{a}$ , die man zu

$$a^\mu = (a^0, \mathbf{a}), \quad a_\mu = (a^0, -\mathbf{a}) \quad (2.13)$$

zusammenfasst. Der Übergang von kovarianten zu kontravarianten Vektoren geschieht mit dem **metrischen Tensor**  $g^{\mu\nu}$  in der Form

$$a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu, \quad a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu, \quad (2.14)$$

wobei nach der Einsteinschen Summenkonvention über doppelt auftretende Indizes (jeweils ein oberer und ein unterer Index) summiert wird. In dieser Art und Weise erhält man die Invariante  $a^2 = a^\mu a_\mu = (a^0)^2 - \mathbf{a}^2$ .

Im flachen Raum nimmt der metrische Tensor die diagonale Gestalt  $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  an<sup>1</sup>. Wichtige Beispiele für Vierervektoren sind:

$$\begin{aligned}
\text{Ereignis: } x^\mu &= (ct, \mathbf{x}), \\
\text{Vierergeschwindigkeit: } u^\mu &= (\gamma, \gamma\boldsymbol{\beta}), \\
\text{Viererwellenvektor: } k^\mu &= (\omega/c, \mathbf{k}), \\
\text{Viererstromdichte: } j^\mu &= (\varrho c, \mathbf{j}), \\
\text{Viererpotential: } A^\mu &= (\phi/c, \mathbf{A}), \\
\text{Vierergradient: } \partial_\mu &= \partial/\partial x^\mu = (\partial/\partial ct, \partial/\partial \mathbf{x}).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Die Vierergeschwindigkeit ist hier dimensionslos und wird hier ausgedrückt durch die dimensionslose Geschwindigkeit  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$  und den Lorentzfaktor  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ .

Wir führen nun den **Feldstärketensor** über

$$F^{\mu\nu(x)} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1/c & -E^2/c & -E^3/c \\ E^1/c & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2/c & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3/c & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

ein. Der Feldstärketensor ist antisymmetrisch,  $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ . Die Maxwell'schen Gleichungen (2.1a)–(2.1d) lauten nun in kovarianter Notation

$$\partial^\mu F^{\nu\rho}(x) + \partial^\rho F^{\mu\nu}(x) + \partial^\nu F^{\rho\mu}(x) = 0, \tag{2.17a}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = 0. \tag{2.17b}$$

Gleichung (2.17a) ersetzt demnach die Gleichungen (2.1a) und (2.1b), wobei beachtet werden muss, dass keiner der Indizes kontrahiert wird. Hierbei handelt es sich um die kovariante Schreibweise einer Jacobi-Identität. Gleichung (2.17b) ersetzt die beiden anderen Maxwell'schen Gleichungen (2.1c) und (2.1d). Die erste der beiden kovarianten Gleichungen (2.17a) kann mithilfe des dualen Feldstärketensors noch vereinfacht werden. Der duale Tensor eines beliebigen zweistufigen Tensors  $T^{\mu\nu}$  ist definiert als

$${}^*T^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} T_{\alpha\beta}, \tag{2.18}$$

---

<sup>1</sup>Diese Metrik ist nicht eindeutig. Man könnte auch die Metrik  $g^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  verwenden. Die Physik bleibt dieselbe, wenn nur konsequent eine der beiden Formen verwendet wird.

wobei  $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$  der vierdimensionale (vollständig antisymmetrische) Levi–Civita-Pseudotensor ist ( $\epsilon^{0123} = 1$  und zyklisch). Der duale Feldstärketensor wird somit

$${}^*F^{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3/c & -E^2/c \\ B^2 & -E^3/c & 0 & E^1/c \\ B^3 & E^2/c & -E^1/c & 0 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

und Gleichung (2.17a) wird ersetzt durch

$$\partial_\mu {}^*F^{\mu\nu}(x) = 0, \quad (2.20)$$

die, abgesehen von der Dualitätstransformation, equivalent zu (2.17b) ist.

Die elektromagnetischen Felder erhält man aus dem Feldstärketensor über Multiplikation mit der Vierergeschwindigkeit bezüglich eines beliebigen Bezugssystems als

$$E^\mu = cF^{\mu\nu}u_\nu, \quad B^\mu = {}^*F^{\mu\nu}u_\nu, \quad (2.21)$$

die sich im Ruhesystem  $u^\mu = (1, \mathbf{0})$  zu  $E^\mu = (0, \mathbf{E})$  und  $B^\mu = (0, \mathbf{B})$  reduzieren. Schlussendlich wird die Wellengleichung (2.5) zu

$$\square E^\nu = (\partial_\mu \partial^\mu) E^\nu = 0. \quad (2.22)$$

Wir kommen auf weitere Details im Rahmen der Transformationsoptik zurück.

## 2.2 Übergang zur geometrischen Optik

Wir nehmen nun an, dass sich eine elektromagnetische Welle nicht nur im freien Raum, sondern in einem Medium mit einem Brechungsindex  $n$  ausbreitet. Wir werden später sehen, dass sich diese Welle dann nur mit einer Geschwindigkeit von  $v = c/n$  ausbreitet, so dass die Wellengleichung für eine Komponente des elektrischen Feldes (die skalare Wellengleichung) die Form

$$\Delta E_i - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = 0 \quad (2.23)$$

annimmt. Die Lösung wollen wir wiederum als ebene Welle

$$E_i(\mathbf{r}, t) = E_{i0} e^{i\varphi(\mathbf{r}, t)} \quad (2.24)$$

mit reeller Amplitude  $E_{i0}$  ansetzen, wobei die Phase  $\varphi(\mathbf{r}, t) = n\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$  nur für räumlich konstanten Brechungsindex tatsächlich die richtige Lösung der

Wellengleichung darstellt. Für räumlich veränderliche Brechungsindexprofile  $n(\mathbf{r})$  versuchen wir einen verallgemeinerten Ansatz

$$E_i(\mathbf{r}, t) = E_{i0}(\mathbf{r})e^{i\Phi(\mathbf{r}, t)}, \quad \Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_0(\mathbf{r}) - \omega t \quad (2.25)$$

mit veränderlicher Amplitude  $E_{i0}(\mathbf{r})$  und allgemeiner veränderlicher Phase  $\Phi_0(\mathbf{r})$ . Wir setzen diesen Ansatz in die Wellengleichung ein und führen die Ableitungen aus,

$$\begin{aligned} \nabla E_i &= [(\nabla E_{i0}) + i(\nabla \Phi_0)E_{i0}] e^{i\Phi}, \\ \Delta E_i &= [(\Delta E_{i0}) + i(\Delta \Phi_0)E_{i0} + 2i(\nabla \Phi_0) \cdot (\nabla E_{i0}) - (\nabla \Phi_0)^2 E_{i0}] e^{i\Phi}, \\ \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} &= -\omega^2 E_{i0} e^{i\Phi}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

so erhalten wir zwei gekoppelte partielle Differentialgleichungen für die Real- und Imaginärteile

$$\Delta E_{i0} + [n^2 k^2 - (\nabla \Phi_0)^2] E_{i0} = 0, \quad (2.27a)$$

$$(\Delta \Phi_0) E_{i0} + 2(\nabla \Phi_0) \cdot (\nabla E_{i0}) = 0. \quad (2.27b)$$

Wir nehmen nun an, dass die Lichtwellenlänge  $\lambda = 2\pi/|\mathbf{k}|$  viel kleiner ist als die Längenskala, auf der sich der Brechungsindex  $n(\mathbf{r})$  ändert, und dass sich die Amplitude  $E_{i0}(\mathbf{r})$  nur schwach ändert. In dieser Näherung können wir den Term  $\Delta E_{i0}$  weglassen und erhalten die **Eikonalgleichung** der geometrischen Optik

$$(\nabla \Phi_0)^2 = n^2 k^2 = \left(\frac{n\omega}{c}\right)^2. \quad (2.28)$$

Die räumlich veränderliche Phase  $\Phi_0(\mathbf{r})$  wird als Eikonal bezeichnet. Die Lösung der Eikonalgleichung definiert die Ebenen konstanter Phase, also die **Wellenfronten**. Senkrecht dazu verlaufen die Lichtstrahlen oder Trajektorien der geometrischen Optik.

## 2.3 Fermatsches Prinzip

Dieselbe Interpretation erhält man, wenn man von einem Variationsprinzip ähnlich dem Hamiltonprinzip startet. In der Optik wird dieses Prinzip als **Fermatsches Prinzip** bezeichnet, das im Wesentlichen die Aussage macht, dass die optische Weglänge des Pfades, das das Licht zwischen zwei Punkten

$A$  und  $B$  wählt, ein Extremum besitzt. Sei die infinitesimale Bogenlänge entlang dieses Pfades  $ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}$ , dann ist die optische Weglänge

$$S = \int_A^B ds n \quad (2.29)$$

entlang des Brechungsindexprofils  $n(\mathbf{r}) = n(x_1, x_2, x_3)$  ein Extremum. Sei  $x_3$  die Ausbreitungsrichtung des Lichtstrahls, dann wird die Bogenlänge  $s = s(x_1(x_3), x_2(x_3), x_3)$  mit den Endpunkten  $A = (x_1(x_{3A}), x_2(x_{3A}), x_{3A})$  und  $B = (x_1(x_{3B}), x_2(x_{3B}), x_{3B})$ . Die optische Weglänge wird dann zu einem Extremum, wenn

$$\delta S = \delta \int_A^B ds n = \delta \int_{x_{3A}}^{x_{3B}} n \frac{ds}{dx_3} dx_3 = \delta \int_{x_{3A}}^{x_{3B}} L(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, x_3) dx_3 = 0, \quad (2.30)$$

wobei

$$L = n \frac{ds}{dx_3} = n(x_1, x_2, x_3) \sqrt{1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} = n(x_1, x_2, x_3) \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2} \quad (2.31)$$

die **optische Lagrangefunktion** und  $\dot{x}_i = dx_i/dx_3$  ( $i = 1, 2$ ) die generalisierten Geschwindigkeiten ( $\dot{x}_3 = dx_3/dx_3 = 1$ ) sind.

Aus dem Wirkungsprinzip folgen die Euler–Lagrangegleichungen

$$\frac{d}{dx_3} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0. \quad (2.32)$$

Definieren wir nun den **optischen Impuls** als

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = n \frac{\dot{x}_i}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}} = n \frac{dx_i}{ds}, \quad (2.33)$$

dann folgt aus der Definition der optischen Weglänge sofort

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = \int \frac{\partial L}{\partial x_i} dx_3 = \int \frac{dp_i}{dx_3} dx_3 = p_i, \quad i = 1, 2 \quad (2.34)$$

unter Verwendung der Euler–Lagrangegleichungen. Führt man noch eine Hamiltonfunktion  $H = \dot{x}_1 p_1 + \dot{x}_2 p_2 - L$  ein, so findet man

$$H = \dot{x}_1 p_1 + \dot{x}_2 p_2 - (\dot{x}_1 p_1 + \dot{x}_2 p_2 + p_3) = -p_3 \quad (2.35)$$

und aus der Hamiltonschen Gleichung  $\partial H/\partial x_3 = -\partial L/\partial x_3$  die fehlende Beziehung

$$\frac{\partial S}{\partial x_3} = \int \frac{\partial L}{\partial x_3} dx_3 = \int \frac{dp_3}{dx_3} dx_3 = p_3. \quad (2.36)$$

Zusammengefasst erhalten wir für den optischen Impuls also  $\mathbf{p} = \nabla S$ . Da wegen  $\mathbf{p} = n d\mathbf{r}/ds$  der Impuls tangential an den Lichtstrahlen liegt, sind die Flächen  $S = \text{const.}$  gerade die Wellenfronten der geometrischen Optik.

## 2.4 Wichtige Lösungen der Wellengleichung

Wir kommen noch einmal zurück auf die Wellengleichung (2.5) und nehmen wieder an, dass das elektrische Feld monochromatisch ist, also eine Zeitabhängigkeit  $e^{-i\omega t}$  besitzt. Dann geht die Wellengleichung in die **Helmholtzgleichung**

$$(\Delta + k^2)\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \quad k = \frac{\omega}{c} \quad (2.37)$$

für die räumlichen Moden über. Die ebenen Wellen  $\mathbf{e}_\sigma e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$  sind gerade spezielle Lösungen von (2.37). Konzentrieren wir uns auf eine Polarisation, so folgt für die Feldamplitude  $E_0(\mathbf{r})$  die skalare Helmholtzgleichung

$$(\Delta + k^2)E_0(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.38)$$

### Kugelwellen

In Kugelkoordinaten  $(r, \Theta, \varphi)$  ist der Laplaceoperator

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \sin \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \Theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (2.39)$$

Die Funktion

$$E_0(\mathbf{r}) = A \frac{e^{ikr}}{r} \quad (2.40)$$

mit einer Konstanten  $A$  löst demnach die skalare Helmholtzgleichung in Kugelkoordinaten. Die Wellenfronten sind Kugelschalen mit einem radialen Abstand von  $\lambda = 2\pi/k$ , die sich radial mit der Phasengeschwindigkeit  $c$  ausbreiten.

Die Kugelwellen lassen sich unter gewissen Umständen vereinfachen. Wir betrachten dazu eine Kugelwelle, die vom Koordinatenursprung ausgeht, an

einem Ort nahe der  $z$ -Achse, so dass die Bedingung  $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2} \ll z$  erfüllt ist. Dann entwickeln wir

$$r = \sqrt{\varrho^2 + z^2} \simeq z + \frac{\varrho^2}{2z} \quad (2.41)$$

und setzen dies in die Phase der Kugelwelle ein. Für die Amplitude machen wir noch die gröbere Näherung  $\varrho \simeq z$ , und wir erhalten mit

$$E_0(\mathbf{r}) \simeq \frac{A}{z} e^{ikz} \exp\left(ik \frac{\varrho^2}{2z}\right) \quad (2.42)$$

die **Fresnelnäherung** einer Kugelwelle. Die Wellenfronten sind in dieser Näherung Rotationsparaboloide, so dass man hier auch von **Parabolwellen** spricht. Wenn der Abstand  $z$  noch viel größer wird, geht die Kugelwelle schlussendlich in eine ebene Welle über.

### Paraxiale Helmholtzgleichung

Unter einer **paraxialen** Welle versteht man eine Welle, deren Wellenfronten sich in  $z$ -Richtung nur wenig verändern, so dass sie annähernd immer noch als ebene Welle betrachtet werden kann. Wir gehen daher von einer ebenen Welle  $Ae^{ikz}$  aus und modulieren ihre Amplitude  $A$  so, dass sie eine langsam veränderliche Funktion  $A(\mathbf{r})$  des Ortes wird. Damit meinen wir, dass sich die Einhüllende  $A(\mathbf{r})$  und ihre Ableitung nach  $z$  innerhalb einer Wellenlänge  $\lambda = 2\pi/k$  nur wenig ändern. Wir schreiben also

$$E_0(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})e^{ikz} \quad (2.43)$$

und fordern, dass  $\partial A/\partial z \ll kA$  und  $\partial^2 A/\partial z^2 \ll k^2 A$  gilt. Setzt man diesen Ansatz in die skalare Helmholtzgleichung (2.38) ein und vernachlässigt  $\partial^2 A/\partial z^2$  gegenüber  $k\partial A/\partial z$  sowie  $k^2 A$ , dann folgt für die langsam veränderliche Einhüllende  $A(\mathbf{r})$  die Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) A(\mathbf{r}) + 2ik \frac{\partial}{\partial z} A(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.44)$$

Dies ist die **paraxiale Helmholtzgleichung**. Durch direktes Nachrechnen kann man sich davon überzeugen, dass die Parabolwellen (2.42) gerade Lösungen von (2.44) sind.

## Gaußstrahlen

Eine weitere Klasse von Lösungen der paraxialen Helmholtzgleichung (2.44) erhält man durch die Ersetzung  $z \mapsto q(z) = z - iz_0$  mit einer Konstanten  $z_0$  in der Parabolwelle,

$$E_0(\mathbf{r}) = \frac{A}{q(z)} e^{ikz} \exp\left(ik \frac{\varrho^2}{2q(z)}\right). \quad (2.45)$$

Teilt man die Funktion  $1/q(z)$  in Real- und Imaginärteil auf,

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} + i \frac{\lambda}{\pi W^2(z)}, \quad (2.46)$$

so liest man ab,

$$W(z) = W_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}, \quad W_0^2 = \frac{\lambda z_0}{\pi}, \quad R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right]. \quad (2.47)$$

Mit der Umdefinition der Konstanten in  $A \mapsto A/(iz_0)$  und der **Gouy-Phase**  $\zeta(z) = -\arctan z/z_0$  finden wir dann für die komplexe Amplitude

$$E_0(\mathbf{r}) = A \frac{W_0}{W(z)} \exp\left[-\frac{\varrho^2}{W^2(z)}\right] \exp\left[ikz + ik \frac{\varrho^2}{2R(z)} + i\zeta(z)\right]. \quad (2.48)$$

Die Intensität ist für jeden Wert von  $z$  eine Gaußfunktion bezüglich der radialen Variablen  $\varrho$ ,

$$I(\varrho, z) = |A|^2 \left(\frac{W_0}{W(z)}\right)^2 \exp\left[-\frac{2\varrho^2}{W^2(z)}\right], \quad (2.49)$$

daher die Bezeichnung Gaußstrahl. Die Strahlbreite wird durch die Funktion  $W(z)$  bestimmt. In der Ebene  $z = 0$  ist der Strahl am schmalsten mit einem Tailenradius  $W_0$  bzw. einem *spot size* von  $2W_0$ . Ein Gaußstrahl divergiert also bei der Propagation. Die Defokussierung wird charakterisiert durch die **Rayleighlänge**  $z_0$ . Die Fokusslänge, bei der der Strahl um den Faktor  $\sqrt{2}$  breiter geworden ist, ist gerade das Doppelte der Rayleighlänge

$$2z_0 = \frac{2\pi W_0^2}{\lambda}. \quad (2.50)$$

Die Wellenfronten liest man aus dem Phasenfaktor in (2.48) ab. Vernachlässigt man die  $z$ -Abhängigkeit von  $R(z)$  und  $\zeta(z)$ , dann sind die Wellenfronten durch die Beziehung  $z + \varrho^2/(2R) = \text{const.}$  gegeben. Dies ist die Gleichung einer parabolischen Fläche mit Krümmungsradius  $R$ . Die Wellenfronten sind in Abb. 2.1 dargestellt.

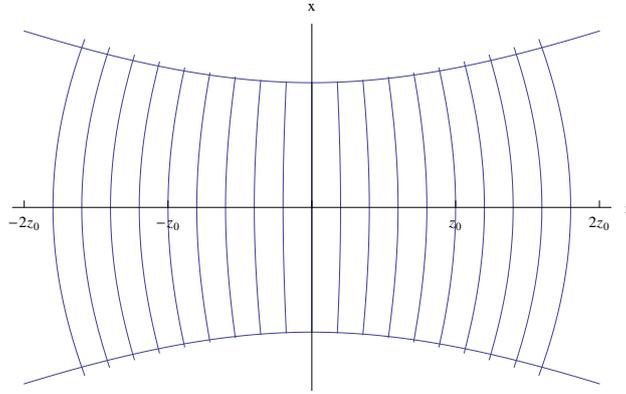


Abbildung 2.1: Wellenfronten eines Gaußstrahls.

### Hermite-Gauß-Moden

Die Gaußstrahlen sind bei weitem nicht die einzigen Moden, die die paraxiale Helmholtzgleichung (2.44) erfüllen. Eine wichtige und interessante Klasse von Moden entsteht, wenn man die komplexe Einhüllende  $E_G(\mathbf{r})$  eines Gaußstrahls derart modifiziert, dass

$$E_0(\mathbf{r}) = E_G(\mathbf{r}) f_x \left[ \frac{\sqrt{2}x}{W(z)} \right] f_y \left[ \frac{\sqrt{2}y}{W(z)} \right] e^{if_z(z)} \quad (2.51)$$

gilt, wobei  $f_x$ ,  $f_y$  und  $f_z$  drei reelle Funktionen ihrer jeweiligen Argumente sein sollen. Die Phase dieser so eingeführten Einhüllenden ist bis auf den Term  $f_z(z)$ , der nicht von  $x$  und  $y$  abhängt, dieselbe wie die des zugrundeliegenden Gaußstrahls. Das bedeutet, dass die Wellenfronten mit denen des Gaußstrahls übereinstimmen. Insbesondere haben sie denselben Krümmungsradius  $R(z)$ . Die Amplitudenverteilung ist allerdings in der transversalen Strahlrichtung modifiziert.

Diese Eigenschaften sind genau dann gesichert, wenn die Einhüllende (2.51) die paraxiale Helmholtzgleichung erfüllt. Aus dieser Forderung ergeben sich Bedingungen an die reellen Funktionen  $f_x$ ,  $f_y$  und  $f_z$ . Dazu führen wir die neuen Variablen  $u = \sqrt{2}x/W(z)$  und  $v = \sqrt{2}y/W(z)$  ein und berechnen die Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x} f_x = \frac{\sqrt{2}}{W(z)} \frac{\partial}{\partial u} f_x, \quad \frac{\partial}{\partial z} f_x = -\frac{u}{W(z)} \frac{\partial W(z)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial u} f_x \quad (2.52)$$

sowie

$$\frac{\partial}{\partial x} E_G = ik \frac{x}{q(z)} E_G, \quad \frac{1}{W(z)} \frac{\partial W(z)}{\partial z} = \frac{z W_0^2}{z_0^2 W^2(z)} = \frac{1}{R(z)}. \quad (2.53)$$

Verwendet man nun noch die Beziehung  $1/q(z) - 1/R(z) = 2i/(kW^2(z))$  sowie die Tatsache, dass die Gaußsche Einhüllende  $E_G(\mathbf{r})$  selbst die paraxiale Helmholtzgleichung erfüllt, dann erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{1}{f_x} \left( \frac{\partial^2 f_x}{\partial u^2} - 2u \frac{\partial f_x}{\partial u} \right) + \frac{1}{f_y} \left( \frac{\partial^2 f_y}{\partial v^2} - 2v \frac{\partial f_y}{\partial v} \right) - kW^2(z) \frac{\partial f_z}{\partial z} = 0. \quad (2.54)$$

Diese Gleichung besteht aus drei Summanden, die jeweils nur von einer der Variablen  $(u, v, z)$  abhängen. Wir lösen diese Gleichung deshalb durch Trennung der Variablen mit den Separationskonstanten  $-2m$  und  $-2n$ , so dass

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_x}{\partial u^2} + u \frac{\partial f_x}{\partial u} = m f_x, \quad (2.55a)$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_y}{\partial v^2} + v \frac{\partial f_y}{\partial v} = n f_y, \quad (2.55b)$$

$$z_0 \left[ 1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2 \right] \frac{\partial f_z}{\partial z} = -(m + n) \quad (2.55c)$$

gilt. Die beiden ersten Gleichungen sind formal Eigenwertgleichungen für die Differentialoperatoren auf der linken Seite und den Eigenwerten  $m$  und  $n$ . Die Eigenfunktionen sind gerade die Hermitepolynome  $H_m(u)$  und  $H_n(v)$ . Somit ist

$$f_x(u) = H_m(u), \quad f_y(v) = H_n(v). \quad (2.56)$$

Die verbleibende Gleichung wird aufintegriert und ergibt

$$f_z(z) = -(m + n) \arctan \frac{z}{z_0} = (m + n) \zeta(z). \quad (2.57)$$

Die komplexe Amplitude wird damit zu

$$\begin{aligned} E_{m,n}(\mathbf{r}) &= A_{m,n} \frac{W_0}{W(z)} h_m \left[ \frac{\sqrt{2}x}{W(z)} \right] h_n \left[ \frac{\sqrt{2}y}{W(z)} \right] \\ &\times \exp \left[ ikz + ik \frac{\varrho^2}{2R(z)} + i(m + n + 1)\zeta(z) \right], \end{aligned} \quad (2.58)$$

wobei  $h_l(u) = H_l(u)e^{-u^2/2}$  die sogenannte Hermitefunktion darstellt. Für  $m = n = 0$  reduziert sich dies zu der Amplitude des gewöhnlichen Gaußstrahls. Die Intensitätsverteilungen der niedrigsten Hermite-Gauß-Moden sind in Abb. 2.2 dargestellt.

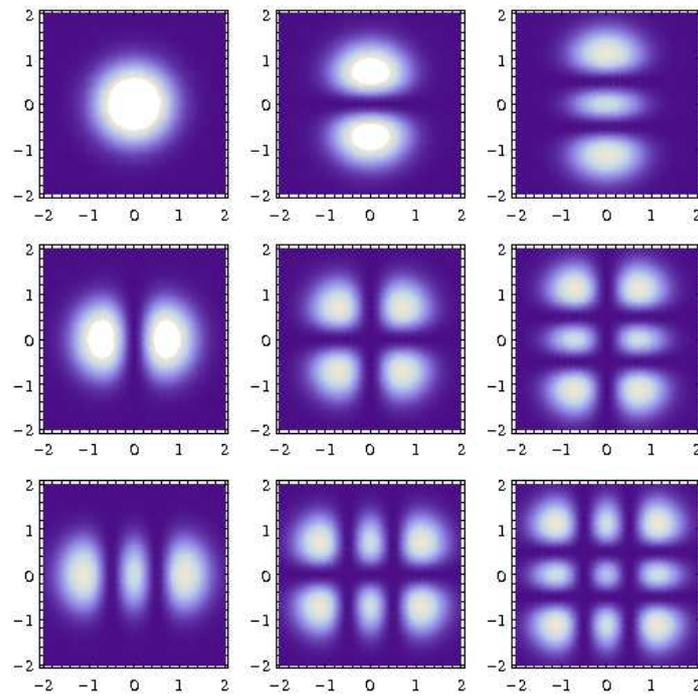


Abbildung 2.2: Intensitätsverteilungen der niedrigsten Hermite-Gauß-Moden für  $(m, n) = (0, 1, 2)$ .